

普通高等教育"十一五"国家级规划教材



21世纪大学本科计算机专业系列教材

屈婉玲 耿素云 张立昂 编著

离散数学习题解答与学习指导（第3版）

http://www.tup.com.cn

- 根据教育部"高等学校计算机科学与技术专业规范"组织编写
- 与美国 ACM 和 IEEE CS *Computing Curricula* 最新进展同步
- 国家级精品教材配套教材
- 国家精品课程配套教材

清华大学出版社



普通高等教育"十一五"国家级规划教材
国家精品课程配套教材
21世纪大学本科计算机专业系列教材

离散数学习题解答与学习指导(第3版)

屈婉玲　耿素云　张立昂　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是根据清华大学出版社与中国计算机学会共同规划的“21世纪大学本科计算机专业系列教材”《离散数学(第3版)》(主教材)以及电子教案编写的配套教学指导用书.全书分为14章,每章包含内容提要、习题、习题解答与分析三部分.内容提要总结了本章的主要定义、定理、公式、重要的结果等;习题部分包含了与上述内容配套的数十道题;习题解答与分析部分不但对上述习题给出了详细的解答,而且对一些典型的解题方法做了比较深入的分析和总结.总计超过500道题,涵盖了数理逻辑、集合论、图论、组合数字、数论、离散概率、代数结构等不同模块的基本内容和典型的解题方法.

本书既可以作为主教材的配套教学用书,也可以单独使用,为学习离散数学的读者在解题能力和技巧的训练方面提供有益的帮助。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学习题解答与学习指导/屈婉玲,耿素云,张立昂编著.--3版.--北京:清华大学出版社,2014
21世纪大学本科计算机专业系列教材
ISBN 978-7-302-33990-8

Ⅰ.①离…　Ⅱ.①屈…　②耿…　③张…　Ⅲ.①离散数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第227624号

责任编辑:张瑞庆
封面设计:常雪影
责任校对:时翠兰
责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:北京国马印刷厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　**印　　张**:15.75　　**字　　数**:381千字
版　　次:2006年2月第1版　2014年1月第3版　　**印　　次**:2014年1月第1次印刷
印　　数:1～3000
定　　价:29.00元

产品编号:050869-01

第 3 版前言

FOREWORD

作为清华大学出版社的 21 世纪大学本科计算机专业系列教材之一,《离散数学习题解答与学习指导》(第 2 版)已经出版 5 年了. 在这 5 年里,一些新的教育理念、教学模式不断提出并加以实践,其中最重要的是“计算思维(computational thinking)”和“大规模开放式在线课程(massive open online course,MOOC)”. 计算思维是数学思维与工程思维的互补与融合,不但是从事计算机科学技术工作的人所需要的专业素质,也对其他学科的发展产生了深远的影响,计算思维的培养已经成为大学计算机专业的重要目标之一. MOOC 教学模式近年来在国外迅速增长,已经产生了巨大的影响;国内也把教学资源共享列入国家计划并给予了大力支持. 这些新的教育理念和教学模式对教材的修订有着重要的影响.

离散数学是研究离散结构及其性质的学科,大量用于计算机系统及其应用领域的建模及分析. 离散数学对培养计算思维起着重要的作用,不但被列入计算机专业的核心课程,而且近年来电子工程、经济学等专业领域也开始在教学中加入一些离散数学的内容. 如何在离散系统建模中体现计算思维是本教材修订的指导思想. 本着对读者负责的精神,我们在这次修订中认真地审阅了原书,对其中的部分内容做了调整,更正了某些错误和疏漏之处,并对文字做了进一步的精细加工. 主教材的更新说明如下:

对第 1 章“数学语言与证明方法”做了部分重写,对重要的数学证明方法进行了分类和较详细的阐述,补充了有关递归定义的内容. 第 5 章补充了关系与函数在数据库及软件工程建模中的应用实例. 第 6 章增加了二部图的匹配、着色和四色定理. 第 7 章删除了基本回路与基本割集系统. 第 10 章对递推方程在算法设计与分析中的应用加以补充.

与主教材配套,本教学辅助用书也对上述内容做了同步更新.

为了提高本书的质量,欢迎大家批评指正. 对广大读者的建议和意见,我们表示衷心的感谢!

作　者

2013 年 8 月于北京大学

第 2 版前言

FOREWORD

作为清华大学出版社和中国计算机学会共同规划的“21 世纪大学本科计算机专业系列教材”之一，这本《离散数学习题解答与学习指导》已经出版两年了. 在这两年的时间里，教育部推出了一系列为提高高等学校本科生教育质量的重要举措. 特别是今年年初发布的《教育部、财政部关于实施高等学校本科教学质量与教学改革工程的意见》(教高[2007]1 号)和《教育部关于进一步深化本科教学改革，全面提高教学质量的若干意见》(教高[2007]2 号)，对专业设置、教学模式、课程建设、师资队伍等各个方面不但提出了更高的建设目标，也为保证这一工程的顺利执行提供了有力的保证.

好的教师和好的教材是保证教学质量的前提条件. 本着对读者负责的精神，我们在这次修订工作中认真地审阅了原书，根据教学要求对其中的部分内容做了调整，更正了某些错误和疏漏之处，并对文字做了进一步的加工. 内容上主要做了如下改动：

与主教材配套，去掉了数理逻辑中有关“一阶逻辑推理理论”的内容. 主要原因是：这部分内容涉及形式系统. 形式系统在系统定义和推理中应该采用完全形式化的方法，通常包含形式语言以及用形式语言表述的公理和推理规则. 在形式系统中，符号串本身是没有语义的，只能通过解释赋予它们一定的语义，但在讨论系统的公理或推理规则时应该与语义无关. 本书在第 1 版的叙述中没有完全采用这种形式化的方法. 如果从知识体系的严谨性出发，应该采用这种完全形式化的表述方法. 但是，这不但与本书的整体写作风格不够协调，而且内容也偏深，超出本教材的要求，因此本次修订决定删掉这部分内容.

为了进一步提高本书的质量，我们恳切地欢迎读者继续提出建议和意见.

作　者

2007 年 11 月于北京大学

第 1 版前言

FOREWORD

离散数学是研究离散量的结构及其相互关系的数学学科. 美国 ACM 和 IEEE *Computing Curricula 2005* (CC2005)与我国教育部高教司主持评审的《中国计算机科学与技术学科教程 2002》(CCC2002)都把离散数学列为计算机科学与技术专业的核心课程. 通过离散数学的学习,不但可以使学生掌握处理离散结构的描述工具和方法,为后续课程的学习创造条件,而且能够提高学生的数学素养,培养抽象思维和严格的逻辑推理能力,对将来参与创新性的研究和开发工作也是非常有益的.

离散数学具有数学类课程的内容抽象、体系严谨、逻辑性强、习题量大、解题思路灵活多变等特征,除此之外还有它自己的特点,主要体现如下:

- 概念多,定理多,知识点比较散,概念容易混淆,不太容易掌握知识点之间的内在联系与知识体系.
- 数理逻辑、集合论、图论、组合数学、数论、离散概率、代数结构等各部分内容分别来自不同的数学分支,所采用的数学模型和处理方法差别较大,特别是解题的思路和技巧有着明显的区别.
- 在学习中要用到初等数学、微积分、线性代数等多门课程中的相关的概念与结果.
- 与计算机专业的其他课程,如数据结构、编译技术、人工智能、信息安全、算法设计与分析、数据库原理、网络技术等联系紧密,应用背景较强.

由于这些特点,初学者往往会感到比较困难,特别是拿到题目后不知道如何着手. 为了帮助学生更好地掌握这门课程,我们在多年教学实践和大量习题资料积累的基础上,编写了这本《离散数学习题解答与学习指导》.

本书与清华大学出版社出版的中国计算机学会“21 世纪大学本科计算机专业系列教材”《离散数学(第 2 版)》(主教材)以及配套的电子教案一起构成了立体化离散数学系列教材. 全书分为 14 章,与主教材中的章对应. 每章包含内容提要、习题、习题解答与分析三部分. 内容提要总结了本章的主要定义、定理、公式、重要的结果等;习题部分包含与上述内容配套的数十道题;习题解答与分析部分不但对上述习题给出了比较详细的解答,而且对一些典型的解题方法做了比较深入的分析和总结. 解答的习题(大题)总计超过 500 道,涵盖了数理逻辑、集合论、图论、组合数学、数论、离散概率、代数结构等各个不同离散数学模块的基本内容和典型的解题方法. 全书内容丰富,概念清晰,讲解翔实易懂,通过不同解法的对比与分析,进一步加强了解题技巧的训练,同时本书习题中也选择了计算机科学技术中的典型应用实例,以增加理论联系实际的感性认识.

本书既可以作为主教材的配套教学用书,也可以单独使用,为学习离散数学的其他读者

在解题能力和技巧的训练方面提供有益的帮助.

本书的第1、2、3、6、7章由耿素云编写,第4、5、8、9、10、14章由屈婉玲编写,第11、12、13章由张立昂编写.

在本书编写过程中参考了国内外多种版本的离散数学教材和相关的文献资料,本书的出版也得到21世纪大学本科计算机专业系列教材编委会与清华大学出版社的大力帮助,在此表示衷心的谢意. 由于水平所限,错误和疏漏之处期待着读者的批评指正.

作　者

2005年10月于北京大学

目录

CONTENTS

第 1 章 数学语言与证明方法

1.1 内容提要

1. 常用的数学符号

- 集合符号;
- 运算符号;
- 逻辑符号.

2. 集合及其运算

集合与元素:

$x\in A$(x 是 A 的元素)、$x\notin A$(x 不是 A 的元素).

特殊数的集合:

N(自然数集合);**Z**(整数集合);

$\mathbf{Z}^{+}$(正整数集合);**Q**(有理数集合);

$\mathbf{Q}^{*}$(非 0 有理数集合);**R**(实数集合);

$\mathbf{R}^{*}$(非 0 实数集合).

集合之间的关系:

$$A\subseteq B\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$$
$$A\nsubseteq B\Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\notin B)$$
$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$$
$$A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B$$
$$A\not\subset B\Leftrightarrow A\nsubseteq B\vee A=B$$

$\varnothing$(空集).

定理 1.1 空集是一切集合的子集.

推论 空集是唯一的.

全集 全集不是唯一的.

集合的幂集:

$$P(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$$

定理 1.2 n 元集的幂集有 2^n 个元素.

集合的运算:

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$$

$$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$$

$$\sim A=\{x \mid x\notin A\}=E-A$$（E 为全集）

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

注意 (1) 以上有些运算可以推广到多个集合;

(2) 可以用文氏图直观表示运算结果;

(3) 若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 是不交的.

基本集合恒等式:

幂等律 $A\cup A=A$;$A\cap A=A$.

交换律 $A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$.

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

德摩根律绝对形式 $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$;

$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$.

德摩根律相对形式 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$;

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$;$A\cap(A\cup B)=A$.

零律 $A\cup E=E$;$A\cap\varnothing=\varnothing$.

同一律 $A\cup\varnothing=A$;$A\cap E=A$.

排中律 $A\cup\sim A=E$.

矛盾律 $A\cap\sim A=\varnothing$.

余补律 $\sim\varnothing=E$;$\sim E=\varnothing$.

双重否定律 $\sim(\sim A)=A$.

补交转换律 $A-B=A\cap\sim B$.

对称差$\oplus$运算满足:

交换律 $A\oplus B=B\oplus A$.

结合律 $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$.

$\cap$对$\oplus$分配律 $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$.

$A\oplus\varnothing=A$;$A\oplus E=\sim A$;

$A\oplus A=\varnothing$;$A\oplus\sim A=E$.

3. 证明方法概述

证明推理 $A\rightarrow B$ 正确的方法:

直接证明法 由 A 为真,证明 B 为真.

间接证明法 证明 $\neg B\rightarrow\neg A$ 为真(从而 $A\rightarrow B$ 为真).

归谬法(也称**反证法**) 欲证 B 为真.若 B 为假,能推出矛盾,从而证明 B 为真. 间接证明法也是特殊的归谬法.

分情况证明法(穷举法) 欲证 $(A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_k)\rightarrow B$ 为真,只需证明 $(A_1\rightarrow B)$,$(A_2\rightarrow B)$,…,$(A_k\rightarrow B)$均为真.

构造性证明法 若 A 为真,能构造出 B 来,从而证明了 $A \to B$ 为真.

前件假证明法 若能证明 A 为假,从而证明了 $A \to B$ 为真.

后件真证明法(平凡证明法) 若能证明 B 为真,从而证明了 $A \to B$ 为真.

数学归纳法

第一数学归纳法的步骤:

(1) 归纳基础:证明 $P(n_0)(n_0 \geqslant 0)$ 为真;

(2) 归纳步骤:$\forall n(n \in \mathbf{N} \land n \geqslant n_0)$,若 $P(n)$ 为真,证明 $P(n+1)$ 为真.

第二数学归纳法的步骤:

(1) 归纳基础:证明 $P(n_0)$ 为真;

(2) 归纳步骤:$\forall n(n \in \mathbf{N} \land n \geqslant n_0)$,若 $P(n_0), P(n_0+1), \cdots, P(n)$ 均为真,能证明 $P(n+1)$ 为真.

谬误的证明方法 举反例.

递归定义(归内定义) 用自身定义自身.

1.2 习 题

1.1 用列举法表示下列各集合.

(1) $\{x \mid x$ 是方程 $2x^2+3x-2=0$ 的根$\}$.

(2) $\{x \mid x$ 是方程 $x^2-2x+5=0$ 的实根$\}$.

(3) $\{x \mid x$ 是完全数 $\land 5 \leqslant x \leqslant 10\}$.

(4) $\{x \mid x$ 是整数 $\land x^2=3\}$.

(5) $\{x \mid x$ 是空集$\}$.

1.2 用描述法表示下列各集合.

(1) $\{x, y, z\}$.

(2) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

(3) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

(4) $\varnothing$.

1.3 判断下列每组的两个集合是否相等.

(1) $A=\{3,1,1,5,5\}, B=\{1,3,5\}$.

(2) $A=\varnothing, B=\{\varnothing\}$.

(3) $A=\varnothing, B=\{x \mid x$ 是有理数并且是无理数$\}$.

(4) $A=\{1,2,\varnothing\}, B=\{\{\varnothing\},2,1\}$.

1.4 判断下列命题是否为真.

(1) $\varnothing \subseteq \varnothing$.

(2) $\varnothing \subset \varnothing$.

(3) $\varnothing \in \varnothing$.

(4) $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

(5) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$.

(6) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$.

(7) $\{\varnothing\}\in\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$.

1.5 设 A 为任意集合,判断下列命题是否为真.

(1) $\varnothing\in P(A)$.

(2) $\varnothing\subseteq P(A)$.

(3) $\{\varnothing\}\in P(A)$.

(4) $\{\varnothing\}\subseteq P(A)$.

(5) $\{\varnothing\}\in P(P(A))$.

(6) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq P(P(A))$.

1.6 求下列集合中的元素个数.

(1) $\{x\mid x\in\mathbf{Z}\wedge -3\leqslant x<2\}$.

(2) $\{x\mid x\in\mathbf{N}\wedge x$ 是偶素数$\}$.

(3) $\{x\mid x\in\mathbf{N}\wedge x$ 是奇数 $\wedge\, x$ 是偶数$\}$.

(4) $\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.

(5) $\{\{\{\varnothing\}\}\}$.

(6) $P(A)$,$A=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

1.7 设 $A=\{a,2,\{3\},4\}$,$B=\{\{a\},4,3,1\}$.判断下列命题是否为真.

(1) $a\in A$.

(2) $a\in B$.

(3) $\{a\}\in A$.

(4) $\{a\}\in B$.

(5) $\{a\}\subseteq A$.

(6) $\{a\}\subseteq B$.

(7) $\{a,\{3\},4\}\subseteq A$.

(8) $\{a,\{3\},4\}\subseteq B$.

(9) $\varnothing\subseteq A$.

(10) $\varnothing\subseteq\{\{a\}\}\subseteq B$.

1.8 已知 A,B 为两个集合,且 $A\subseteq B$,则 $A\notin B$ 一定为真吗?

1.9 设 $A=\{1,2,3,4\}$,试求出 A 的全部2元子集.

1.10 设 $A=\{\varnothing,a\}$,求出 A 的全部子集.

1.11 求下列集合的幂集.

(1) $\varnothing$.

(2) $\{1,\{a,b\}\}$.

(3) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

(4) $\{2,2,2,3\}$.

1.12 设全集 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$,其子集 $A=\{1,4\}$,$B=\{1,2,5\}$,$C=\{2,4\}$.求下列集合.

(1) $A\cap\sim B$.

(2) $(A\cap B)\cup\sim C$.

(3) $\sim(A\cap B)$.

(4) $P(A)\cap P(B)$.

(5) $P(A)\cap\sim P(B)$.

1.13　画出下列集合的文氏图.

(1) $A\cap(B\cup C)$.

(2) $\sim A\cap\sim B\cap\sim C$.

(3) $(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)$.

1.14　设 $A=\{\varnothing\}$, $B=\{1,2\}$,求 $P(A)\oplus P(B)$.

1.15　设 $A\subseteq B\wedge C\subseteq D$,证明 $A\cup C\subseteq B\cup D$.

1.16　设 $A\subset B\wedge C\subset D$, $A\cup C\subset B\cup D$ 一定为真吗?

1.17　设 A,B 为两个集合,已知 $A\subseteq B$, $B\subset A$ 可能吗? 为什么?

1.18　试确定下列集合之间的包含或属于关系.

$A=\{x\mid x\in\mathbf{R}\wedge x>0\wedge x^2=4\}$.

$B=\{x\mid x\in\mathbf{R}\wedge x^2-5x+6=0\}$.

$C=\{\{x\}\mid x\in\mathbf{N}\wedge x$ 为偶数$\}$.

$D=\{\{2\},\{4\},\{3\},2,3\}$.

1.19　对于题 1.18 中的 A,B,C,D,计算:

(1) $A\cup B\cup D$.

(2) $A\cap B\cap D$.

(3) $A\oplus B$.

(4) $(A\cap B)\oplus A$.

(5) $A\oplus C$.

1.20　设 $A=\{x\mid x$ 是北大文科学生$\}$;

$B=\{x\mid x$ 是北大理科学生$\}$;

$C=\{x\mid x$ 喜欢看小说$\}$;

$D=\{x\mid x$ 喜欢数学$\}$.

已知:北大文科学生都爱看小说,北大理科学生都喜欢数学,试确定 A,B,C,D 之间的包含关系.

1.21　设 $A_i=\{1,2,\cdots,i\}$, $i=1,2,\cdots$,求:

(1) $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$.

(2) $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$.

1.22　设 $A_i=\{i,i+1,i+2,\cdots\}$, $i=1,2,\cdots$,求:

(1) $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$.

(2) $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$.

1.23　下列集合中,哪些是彼此相等的?

$A=\{3,4\}$　　　　$B=\{3,4\}\cup\varnothing$

$C=\{3,4\}\cup\{\varnothing\}$　　$D=\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge x^2-7x+12=0\}$

$E=\{\varnothing,3,4\}$　　$F=\{3,4,4\}$

$G=\{4,\varnothing,\varnothing,3\}$

1.24　设全集是某中学全体学生集合,它的子集为:

$A=\{x \mid x$ 是男生$\}$;

$B=\{x \mid x$ 是初三学生$\}$;

$C=\{x \mid x$ 是科普队员$\}$.

用描述法表示下面集合.

(1) $\sim C$.

(2) $A\cap B\cap\sim C$.

(3) $\sim A\cap\sim B\cap C$.

1.25　设 A 为任一集合,证明:$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in P(P(P(A)))$.

1.26　设 A,B,C 为3个集合,证明:

(1) 若 $A\subseteq B\wedge B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

(2) 若 $A\in B\wedge B\subseteq C$,则 $A\in C$.

1.27　设 A,B,C 为3个集合,已知 $(A\cap C)\subseteq(B\cap C)$,$(A\cap\sim C)\subseteq(B\cap\sim C)$,证明:$A\subseteq B$.

1.28　设 A,B 为集合,证明:$A\cap(B-A)=\varnothing$.

1.29　设 A,B 为集合,证明:$(A\cap B)\cup(A-B)=A$.

1.30　用直接证明法证明:若对于任意的集合 B,均有 $A\cup B=B$,则 $A=\varnothing$.

1.31　用归谬法证明题1.30中的命题.

1.32　化简下列集合表达式.

(1) $((A\cup B)\cap B)-(A\cup B)$.

(2) $((A\cup B\cup C)-(B\cup C))\cup A$.

(3) $(B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$.

1.33　化简下列集合表达式.

(1) $(A\cap B)\cup(A-B)$.

(2) $(A\cup(B-A))-B$.

(3) $((A-B)-C)\cup((A-B)\cap C)\cup((A\cap B)-C)\cup(A\cap B\cap C)$.

(4) $(A\cap B\cap C)\cup((A\cap\sim B\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)$.

1.34　定理1.1的推论改写为:"若 $\varnothing_1,\varnothing_2$ 是任意两个空集,则 $\varnothing_1=\varnothing_2$",试用直接证明法与间接证明法证明之.

1.35　用数学归纳法证明:若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为某全集的子集,则:

$$\sim\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(\sim A_i)$$

1.36　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B$ 为集合,用数学归纳法证明:

$$(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)\cup B=(A_1\cup B)\cap(A_2\cup B)\cap\cdots\cap(A_n\cup B)$$

1.37　用数学归纳法证明:$\forall n\in\mathbf{N}^+$,

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.38　用数学归纳法证明：$\forall n \in \mathbf{N}^+$，

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

1.39　用数学归纳法证明：$\forall n \in \mathbf{N}^+$，$3 \mid (n^3-n)$.

1.40　递归定义 a_n，$n \in \mathbf{N}$ 如下：

$$a_0=1$$
$$a_{n+1}=2a_n+1 \quad n \in \mathbf{N}$$

通过观察给出 a_n 的值，并证明之.

1.41　递归定义集合 A 如下：

(1) $3 \in A$，

(2) 若 $x,y \in A$，则 $xy \in A$，

(3) 只有有限次应用(1)和(2)得到的数属于 A.

试用描述法表示 A.

1.42　递归定义集合 B 如下：

(1) ( ) $\in B$，

(2) 若 $x \in B$，则 $(x) \in A$，

(3) 若 $x,y \in B$，则 $(xy) \in A$，

(4) 只有有限次应用(1)～(3)得到的符号串属于 B.

问下述符号串是否属于 B：

(1) ((( ))( ))

(2) (( )( ))

(3) ( )( )

(4) (( )( )))

(5) ((( )( ))( ))

1.3　习题解答与分析

1.1　设本题中的 5 个集合分别为 A、B、C、D、E，它们的列举法表示为：

(1) $A=\left\{\frac{1}{2},-2\right\}$. 只需求出给定方程 $2x^2+3x-2=0$ 的两个根 $\frac{1}{2}$ 和 -2 即可.

(2) $B=\varnothing$. 只需注意到方程 $x^2-2x+5=0$ 的判别式 $(-2)^2-4\times1\times5=-16<0$，因而无实根.

(3) $C=\{6\}$. 只需注意到完全数的定义：自然数 $n(n\geqslant1)$ 为完全数 $\Leftrightarrow n$ 等于除本身以外的所有因子之和. 在 5～10 中，只有 $6=1+2+3$，是完全数，其他都不是完全数.

(4) $D=\varnothing$.

(5) $E=\{\varnothing\}$.

注意　本题中 $B=D=\varnothing$，这正说明空集有不同的描述方法，但空集是唯一的.

1.2　设本题中的 4 个集合分别为 A、B、C、D，则

(1) $A=\{x \mid x$ 是最后 3 个英文字母之一$\}$.

(2) $B=\{x \mid x\in \mathbf{Z} \land |x|\leqslant 3\}$,$\mathbf{Z}$ 为整数集.

(3) $C=\{x \mid x$ 为空集或以空集为元素的单元集$\}$.

(4) $D=\{x\in \mathbf{Z} \land x^2+2=0\}$.

注意 A、B、C、D 的表示法都不是唯一的,特别是 D 可以有多种不同的表示法.

1.3 (1) $A=B$. 只需注意在朴素集合论中,集合中的元素互不相同,并且不讲顺序.

(2) $A\neq B$. 注意到 A 中无元素,而 B 中有一个元素$\varnothing$.

(3) $A=B$. 注意,B 也是$\varnothing$.

(4) $A\neq B$. 注意,A 中的元素$\varnothing\notin B$,B 中的元素$\{\varnothing\}\notin A$.

1.4 (1)、(4)、(5)为真,其余的均为假.

分析 解本题要注意以下两点:

① 空集$\varnothing$是一切集合的子集,并且$\varnothing$是唯一的;

② 严格区分集合之间的包含关系以及元素与集合的属于关系.

由①可知(1)、(5)为真,而(2)为假. 由②可知(4)为真,而(3)、(6)、(7)为假.

1.5 只有(3)为假,其余的全为真.

分析 解本题主要应用以下定理或定义:

① 空集$\varnothing$是任何集合的子集;

② 集合幂集的定义:$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$,$P(P(A))=\{x \mid x\subseteq P(A)\}$;

③ 子集的定义:$A\subseteq B\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$.

由①与②可知,$\varnothing\subseteq A\Rightarrow\varnothing\in P(A)$,因而(1)为真;

因为 $P(A)$为集合和①可知,$\varnothing\subseteq P(A)$,因而(2)为真;

因为$\varnothing\in P(A)$和③可知,$\{\varnothing\}\subseteq P(A)$,因而(4)为真;

由于$\varnothing\in P(A)$和②可知,$\{\varnothing\}$为 $P(A)$的1元子集,所以$\{\varnothing\}\in P(P(A))$,故(5)为真;

由①和(5)可知,$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq P(P(A))$,所以(6)为真.

对于(3),不是对任何集合都真. 当 A 中含元素$\varnothing$时,(3)为真,例如 $A=\{\varnothing,a\}$,则 $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{a\},\{\varnothing,a\}\}$,所以$\{\varnothing\}\in P(A)$. 而当 A 中不含$\varnothing$时,如 $A=\{a,b\}$时,$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,此时$\{\varnothing\}\notin P(A)$,因而$\{\varnothing\}\in P(A)$为假. 由以上讨论可知,(3)中命题为假.

1.6 记(1)~(6)中集合分别为 A、B、C、D、E、F,只需将它们中的元素均写出来即可得到答案.

$$A=\{-3,-2,-1,0,1\},|A|=5$$
$$B=\{2\},|B|=1$$
$$C=\varnothing,|C|=0$$
$$D=\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},|D|=2$$
$$E=\{\{\{\varnothing\}\}\},|E|=1$$
$$F=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},|F|=4$$

1.7 (1)、(4)、(5)、(7)、(9)、(10)为真,(2)、(3)、(6)、(8)为假.

1.8 $A\subseteq B$ 时,$A\notin B$ 不一定为真.

当 A 中元素都在 B 中,并且 A 也在 B 中时,$A\subseteq B$ 且 $A\in B$. 例如,$A=\{a,b\}$,$B=\{a,b,c,d,\{a,b\}\}$,此时 $A\subseteq B$ 且 $A\in B$.

当 A 中元素都在 B 中，但 A 不在 B 中时，$A\subseteq B$，而 $A\notin B$. 例如，$A=\{\varnothing,a,b,c\}$，$B=\{\{\varnothing\},\varnothing,a,b,c,d,e\}$，此时，$A\subseteq B$，$A\notin B$.

1.9　由于 $|A|=4$，所以 A 的 2 元子集共有 C_4^2 个，它们是 $\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{1,4\}$、$\{2,3\}$、$\{2,4\}$、$\{3,4\}$.

1.10　$A=\{\varnothing,a\}$ 为 2 元集，因而 A 共有 $2^2=4$ 个子集：

0 元子集 1 个：$\varnothing$；

1 元子集 2 个：$\{\varnothing\}$，$\{a\}$；

2 元子集 1 个：$\{\varnothing,a\}=A$.

1.11　设(1)～(4)中集合分别为 A、B、C、D，注意 $D=\{2,2,2,3\}=\{2,3\}$，则

$$P(A)=\{\varnothing\}$$
$$P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{\{a,b\}\},\{1,\{a,b\}\}\}$$
$$P(C)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$$
$$P(D)=\{\varnothing,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$$

1.12　严格按定义求解本题.

(1) $\sim B=\{3,4,6\}$，$A\cap\sim B=\{4\}$.

(2) $\sim C=\{1,3,5,6\}$，$A\cap B=\{1\}$；

$(A\cap B)\cup\sim C=\{1,3,5,6\}$.

(3) $A\cap B=\{1\}$，所以，$\sim(A\cap B)=\{2,3,4,5,6\}$.

(4) $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{4\},\{1,4\}\}$；

$P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{5\},\{1,2\},\{1,5\},\{2,5\},\{1,2,5\}\}$；

$P(A)\cap P(B)=\{\varnothing,\{1\}\}$.

(5) $\sim P(B)=P(E)-P(B)$，而 $|P(E)|=2^6=64$，$|P(B)|=2^3=8$，于是 $|\sim P(B)|=64-8=56$，因而求 $\sim P(B)$ 工作量太大了，但也可以不求 $\sim P(B)$，就能求出 $P(A)\cap\sim P(B)$.

因为 $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{4\},\{1,4\}\}$，所以 $P(A)\cap\sim P(B)$ 中至多有 4 个元素，但因 $P(B)$ 中含 $\varnothing$ 和 $\{1\}$，所以 $\sim P(B)$ 中不含 $\varnothing$ 和 $\{1\}$，因而 $P(A)\cap\sim P(B)$ 不可能含 $\varnothing$ 和 $\{1\}$，又因为 $4\notin B$，所以 $\{4\}$，$\{1,4\}$ 都 $\notin P(B)$，故 $\{4\}\in\sim P(B)$，$\{1,4\}\in\sim P(B)$，所以

$$P(A)\cap\sim P(B)=\{\{4\},\{1,4\}\}$$

1.13　(1) $A\cap(B\cup C)$ 的文氏图为图 1.1(a)中的阴影部分所示.

(2) $\sim A\cap\sim B\cap\sim C=\sim(A\cup B\cup C)$，其文氏图为图 1.1(b)中的阴影部分所示.

(3) $(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)=A\oplus(B\cup C)$，其文氏图为图 1.1(c)中的阴影部分所示.

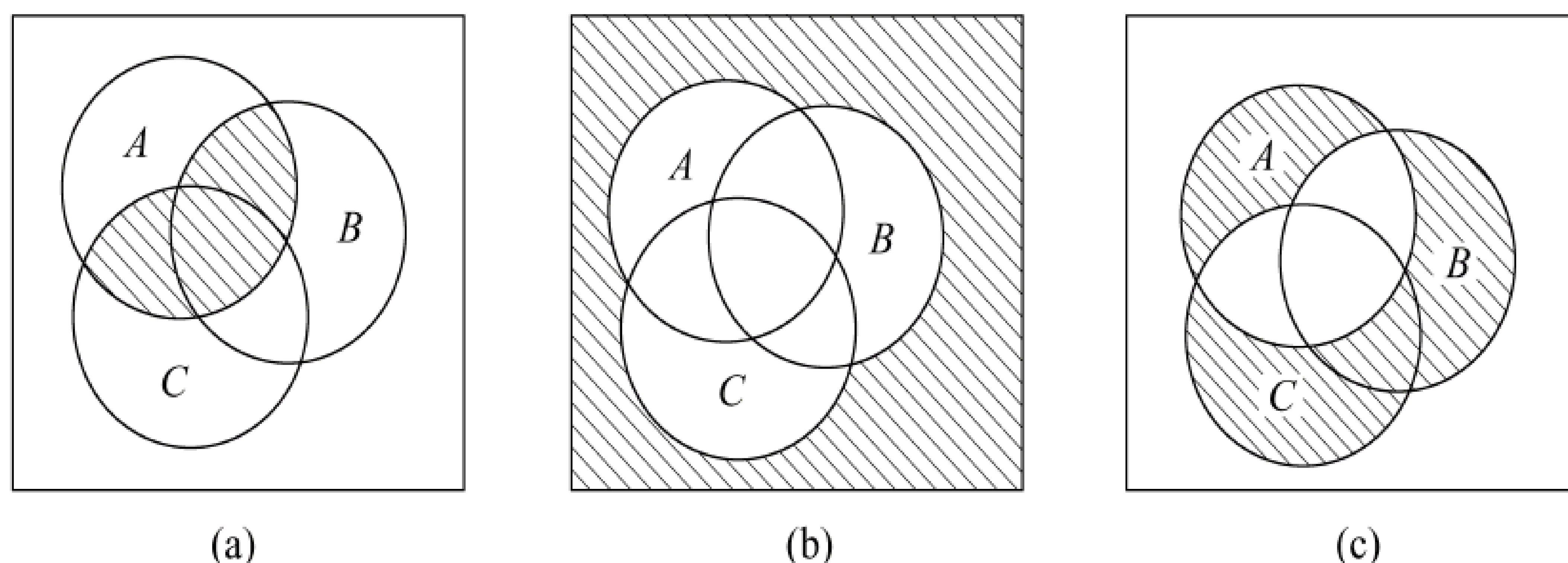


图　1.1

观察图1.1,不难发现,图1.1(a)与图1.1(c)图中阴影部分所表示的集合之并为 $A\cup B\cup C$. 又图1.1(a)、图1.1(b)和图1.1(c)图中阴影部分之并为全集 E. 以上的观察结果都是正确的,证明如下.

(1)与(3)中集合之并为

$(A\cap(B\cup C))\cup(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)$

$=(A\cap(B\cup C))\cup(A\cap\sim(B\cup C))\cup((B\cup C)\cap\sim A)$ (补交转换律)

$=(A\cap((B\cup C)\cup\sim(B\cup C)))\cup((B\cup C)\cap\sim A)$ (分配律)

$=(A\cap E)\cup((B\cup C)\cap\sim A)$ (排中律(E为全集))

$=A\cup((B\cup C)\cap\sim A)$ (同一律)

$=(A\cup B\cup C)\cap(A\cup\sim A)$ (分配律)

$=(A\cup B\cup C)\cap E$ (排中律)

$=A\cup B\cup C$ (同一律)

(1)、(2)、(3)中集合之并为

$(A\cup B\cup C)\cup(\sim A\cap\sim B\cap\sim C)$

$=(A\cup B\cup C)\cup\sim(A\cup B\cup C)=E$ (德摩根律、排中律)

通过以上的演算,说明对文氏图的观察结论是正确的.

1.14 $A=\{\varnothing\}, P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}, B=\{1,2\}, P(B)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$,于是

$$P(A)\oplus P(B)=\{\{\varnothing\},\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

1.15 用包含关系及并集的定义证明.

$\forall x$, $x\in(A\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\vee x\in C$

$\Rightarrow x\in B\vee x\in D$ (因为 $A\subseteq B\wedge C\subseteq D$)

$\Leftrightarrow x\in(B\cup D)$

所以 $A\cup C\subseteq B\cup D$.

1.16 当 $A\subset B\wedge C\subset D$ 时,$A\cup C\subset B\cup D$ 不一定为真,也就是说,当 A 与 C 分别为 B 和 D 的真子集时,$A\cup C$ 不一定是 $B\cup D$ 的真子集. 举反例如下:

取 $A=\{x|x\in\mathbf{N}\wedge x$ 为奇数$\}$,$C=\{x|x\in\mathbf{N}\wedge x$ 为偶数$\}$,并取 $B=D=\mathbf{N}$,则 $A\subset B\wedge C\subset D$,可是 $A\cup C=B\cup D=\mathbf{N}$,其中 $\mathbf{N}$ 为自然数集合.

若改为:

设 $A\subset B\wedge C\subset D$,则 $A\cup C\subseteq B\cup D$,则命题为真.

1.17 不可能. 假若 $B\subset A$,则存在 $x\in A\wedge x\notin B$,这与 $A\subseteq B$ 矛盾.

1.18 解本题只需用列举法写出各集合,就容易找出集合之间的包含与属于关系.

$A=\{2\}$;$B=\{2,3\}$;$C=\{\{0\},\{2\},\{4\},\cdots\}$;$D=\{\{2\},\{4\},\{3\},2,3\}$. 易知,$A\subset B\subset D$,$A\in C$,$A\in D$.

1.19 (1) $A\cup B\cup D=\{\{2\},\{3\},\{4\},2,3\}=D$;

(2) $A\cap B\cap D=\{2\}=A$;

(3) $A\oplus B=\{3\}$;

(4) $(A\cap B)\oplus A=\{2\}\oplus\{2\}=\varnothing$;

(5) $A\oplus C=\{2,\{0\},\{2\},\{4\},\cdots\}=A\cup C$.

1.20　$A\subseteq C, B\subseteq D$.

1.21　(1) $\bigcup_{i=1}^{n}A_i = A_n = \{1,2,\cdots,n\}$.

(2) $\bigcap_{i=1}^{n}A_i = A_1 = \{1\}$.

分析　$A_i=\{1,2,\cdots,i\}, i=1,2,\cdots$,是一个单调增的集合列,$A_1\subset A_2\subset\cdots$,所以

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i = A_n,\quad \bigcap_{i=1}^{n}A_i = A_1$$

并且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{1,2,\cdots\}=\mathbf{N}-\{0\}$,$\mathbf{N}$ 为自然数集合. 而 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i = A_1 = \{1\}$.

1.22　(1) $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1=\{1,2,\cdots\}=\mathbf{N}-\{0\}$.

(2) $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_n=\{n,n+1,\cdots\}=\{x\mid x\in\mathbf{N}\wedge x\geqslant n\}$.

分析　$A_i=\{i,i+1,i+2,\cdots\}, i=1,2,\cdots$是单调减的集合列,所以

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1,\quad \bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_n$$

并且

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1,\quad 而\ \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$$

1.23　$A=B=D=F$, $C=E=G$.

分析　只需要注意:对于任意集合 A,均有 $A\cup\varnothing=A$,集合中元素互不相同,并且不讲顺序.

1.24　(1) $\sim C=\{x\mid x$ 不是科普队员$\}$.

(2) $A\cap B\cap\sim C=\{x\mid x$ 是初三男生,但不是科普队员$\}$.

(3) $\sim A\cap\sim B\cap C=\{x\mid x$ 是女科普队员,但不是初三学生$\}$.

1.25　根据定理 1.1(空集是一切集合的子集)及幂集的定义证明本题.

由定理 1.1,得

$$\varnothing\subseteq A\wedge\varnothing\subseteq P(A) \tag{①}$$
$$\Leftrightarrow\varnothing\in P(A)\wedge\varnothing\in P(P(A)) \tag{②}$$
$$\Rightarrow\{\varnothing\}\in P(P(A))\wedge\varnothing\in P(P(A)) \tag{③}$$
$$\Rightarrow\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in P(P(P(A))) \tag{④}$$

分析或提示　A 与 $P(A)$都是集合,由于$\varnothing$是一切集合的子集,所以式①成立. 由幂集的定义可知,式①与式②互为充要条件. 由$\varnothing\in P(A)$,因而由$\varnothing$构成的单元集$\{\varnothing\}$为 $P(A)$的幂集 $P(P(A))$的元素,即$\{\varnothing\}\in P(P(A))$,所以式③成立. 由式③成立,可知$\{\varnothing\}$,$\varnothing$构成的 2 元集$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$为 $P(P(A))$的幂集 $P(P(P(A)))$的元素,即$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in P(P(P(A)))$,故式④成立.

其实下面命题为真:

命题　设 A 为任意的集合,则$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in \underbrace{P(P(\cdots(P}_{k个}(A))\cdots))$, $k\geqslant 3$.

证明　由$\varnothing \in P(A)$,有$\{\varnothing\} \in P(P(A))$. 又有$\varnothing \in P(P(A))$,从而$\{\varnothing,\{\varnothing\}\} \in P(P(P(A)))$.

一般地,由幂集定义,$\varnothing \in \underbrace{P(P(\cdots(P}_{k-2\text{个}}(A))\cdots))$,故$\{\varnothing\} \in \underbrace{P(P(\cdots(P}_{k-1\text{个}}(A))\cdots))$.

根据幂集定义,又有$\varnothing \in \underbrace{P(P(\cdots(P}_{k-1\text{个}}(A))\cdots))$,从而$\{\varnothing,\{\varnothing\}\} \in \underbrace{P(P(\cdots(P}_{k\text{个}}(A))\cdots))$.

1.26　用包含关系的定义证明.

(1) $\forall x$

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in B \quad (\text{因为 } A \subseteq B) \\ &\Rightarrow x \in C \quad (\text{因为 } B \subseteq C) \end{aligned}$$

所以$A \subseteq C$.

(2) $B \subseteq C \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in C)$,而$A \in B$,所以$A \in C$.

分析　(1) 中命题说明集合之间的包含关系具有传递性.

1.27　**方法1**　$\forall x \in A$,分两种情况讨论.

(1) $x \in C$. 此时,$x \in A \cap C$. 由$A \cap C \subseteq B \cap C$,有$x \in B \cap C$. 从而$x \in B$.

(2) $x \notin C$. 此时,$x \in A \cap \sim C$. 由$A \cap \sim C \subseteq B \cap \sim C$,有$x \in B \cap \sim C$. 从而$x \in B$.

总之,都有$x \in B$. 得证$A \subseteq B$.

方法2

$$\begin{aligned} A &= A \cap (C \cup \sim C) \\ &= (A \cap C) \cup (A \cap \sim C) \\ &\subseteq (B \cap C) \cup (B \cap \sim C) \\ &= B \cap (C \cup \sim C) \\ &= B \end{aligned}$$

1.28　**方法1**　归谬法. 假设$A \cap (B-A) \neq \varnothing$,则存在$x$,使得$x \in A \cap (B-A)$. 于是,$x \in A$且$x \in B-A$. 由$x \in B-A$,有$x \notin A$. 从而$x \in A$且$x \notin A$,矛盾. 所以,必有$A \cap (B-A) = \varnothing$.

方法2　直接证明法(进行集合演算).

$$\begin{aligned} & A \cap (B-A) \\ =\ & A \cap (B \cap \sim A) \quad (\text{补交转换律}) \\ =\ & (A \cap \sim A) \cap B \quad (\text{交换律、结合律}) \\ =\ & \varnothing \cap B \\ =\ & \varnothing \end{aligned}$$

1.29　可用多种方法证明本题.

方法1　用集合演算证明.

$$\begin{aligned} & (A \cap B) \cup (A-B) \\ =\ & (A \cap B) \cup (A \cap \sim B) && (\text{补交转换律}) \\ =\ & A \cap (B \cup \sim B) && (\text{分配律}) \\ =\ & A \cap E && (E\text{ 为全集、排中律}) \\ =\ & A && (\text{同一律}) \end{aligned}$$

方法2　用定义证明.

$\forall x\in(A\cap B)\cup(A-B)$,有 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A-B$. 对这两种情况都有 $x\in A$,得证 $(A\cap B)\cup(A-B)\subseteq A$.

反之,$\forall x\in A$,分两种情况讨论.

(1) $x\in B$. 此时,$x\in A\cap B$. 当然有 $x\in(A\cap B)\cup(A-B)$.

(2) $x\notin B$. 此时,$x\in A-B$. 也有 $x\in(A\cap B)\cup(A-B)$.

得证 $A\subseteq(A\cap B)\cup(A-B)$. 所以,$(A\cap B)\cup(A-B)=A$.

1.30 取 $B=\varnothing$,则有 $A\cup\varnothing=\varnothing$. 得证 $A=\varnothing$.

1.31 用归谬法证明 1.30 题.

假设 $A\neq\varnothing$,取 $B=\varnothing$,则 $A\cup B=A\neq\varnothing=B$,这与对于任何集合 B,均有 $A\cup B=B$ 相矛盾,所以原来命题为真.

分析 "要证明 $A\to B$ 为真,只需证明 $\neg B\to\neg A$ 为真",这就是间接证明法."而要证明 $A\to B$ 为真,只需证明当 B 为假时,会推出矛盾来",这就是归谬法. 对本题来说,两种证明法差不多,都是从 $A\neq\varnothing$,找到特殊的 B,使 $A\cup B=B$ 为假.

1.32 (1) $((A\cup B)\cap B)-(A\cup B)$

$=B-(A\cup B)$ (吸收律)

$=B\cap\sim(A\cup B)$ (补交转换律)

$=B\cap(\sim A\cap\sim B)$ (德摩根律)

$=(B\cap\sim B)\cap\sim A$ (交换律、结合律)

$=\varnothing$ (矛盾律、零律)

实际上,由于$(A\cup B)\cap B\subseteq A\cup B$,可以直接看出$((A\cup B)\cap B)-(A\cup B)=\varnothing$.

(2) $((A\cup B\cup C)-(B\cup C))\cup A$

$=((A\cup B\cup C)\cap\sim(B\cup C))\cup A$ (补交转换律)

$=((A\cap\sim(B\cup C))\cup((B\cup C)\cap\sim(B\cup C)))\cup A$ (分配律)

$=(A\cap\sim(B\cup C))\cup A$ (矛盾律、同一律)

$=A$ (吸收律)

(3) $(B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$

$=(B\cap\sim(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$ (补交转换律)

$=(B\cup(A\cap B\cap C))\cap(\sim(A\cap C)\cup(A\cap B\cap C))$ (分配律)

$=B\cap((\sim(A\cap C)\cup(A\cap C))\cap(\sim(A\cap C)\cup B))$ (吸收律、分配律)

$=B\cap(\sim(A\cap C)\cup B)$ (排中律、同一律)

$=B$ (吸收律)

1.33 (1) $(A\cap B)\cup(A-B)$

$=(A\cap B)\cup(A\cap\sim B)$ (补交转换律)

$=A\cap(B\cup\sim B)$ (分配律)

$=A$ (排中律、同一律)

(2) 下面不再注明使用的基本集合恒等式,不过读者阅读时一定要在心里把它补上.

$(A\cup(B-A))-B$

$=(A\cup(B\cap\sim A))\cap\sim B$

$=((A\cup B)\cap(A\cup\sim A))\cap\sim B$

$=(A\cup B)\cap\sim B$

$=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim B)$

$=A\cap\sim B$

$=A-B$

(3) $((A-B)-C)\cup((A-B)\cap C)\cup((A\cap B)-C)\cup(A\cap B\cap C)$

$=((A-B)\cap\sim C)\cup((A-B)\cap C)\cup((A\cap B)\cap\sim C)\cup(A\cap B\cap C)$

$=((A-B)\cap(\sim C\cup C))\cup((A\cap B)\cap(\sim C\cup C))$

$=(A-B)\cup(A\cap B)$

$=(A\cap\sim B)\cup(A\cap B)$

$=A\cap(\sim B\cup B)$

$=A$

(4) $(A\cap B\cap C)\cup(A\cap\sim B\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)$

$=(A\cap(B\cup\sim B)\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)$

$=(A\cap C)\cup(\sim A\cap B\cap C)$

$=(A\cup(\sim A\cap B))\cap C$

$=((A\cup\sim A)\cap(A\cup B))\cap C$

$=(A\cup B)\cap C$

1.34 **方法1** 直接证明法.

由定理1.1可知,空集是一切集合的子集. 于是,因为$\varnothing_1$是空集,所以$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$,又因为$\varnothing_2$是空集,所以$\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$. 由集合相等的定义可知,$\varnothing_1=\varnothing_2$.

方法2 间接证明法.

若$\varnothing_1\neq\varnothing_2$,则$\exists x_0$

$$x_0\in\varnothing_1\quad 且\quad x_0\notin\varnothing_2\qquad 记为“①”$$

或者,$\exists y_0$

$$y_0\notin\varnothing_1\quad 且\quad y_0\in\varnothing_2\qquad 记为“②”$$

在①中,$x_0\in\varnothing_1$与$\varnothing_1$为空集矛盾,在②下,$y_0\in\varnothing_2$,这与$\varnothing_2$为空集矛盾. 所以必有$\varnothing_1=\varnothing_2$.

1.35 (1) 归纳基础:当$n=1$时,等式自然成立.

(2) 归纳步骤:假设对$n(n\geqslant1)$等式成立,要证对$n+1$等式也成立. 事实上,

$$\sim\left(\bigcap_{i=1}^{n+1}A_i\right)=\sim\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\cap A_{n+1}\right)$$

$$=\sim\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\cup\sim A_{n+1}\quad(德摩根律)$$

$$=\left(\bigcup_{i=1}^{n}\sim A_i\right)\cup\sim A_{n+1}\quad(归纳假设)$$

$$=\bigcup_{i=1}^{n+1}(\sim A_i)$$

1.36 (1) 归纳基础:当$n=1$时,等式自然成立.

(2) 归纳步骤:假设对$n(n\geqslant1)$等式成立,要证对$n+1$等式也成立,事实上,

$$
\begin{aligned}
&\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) \cup B \\
&= \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \cup B \\
&= \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cup B\right) \cap (A_{n+1} \cup B) \quad \text{（分配律）} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} (A_i \cup B) \cap (A_{n+1} \cup B) \qquad \text{（归纳假设）} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n+1} (A_i \cap B)
\end{aligned}
$$

1.37 （1）归纳基础：当 $n=1$ 时，$1^2=1=\frac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6}$，等式成立.

（2）归纳步骤：假设对 $n(n\geqslant 1)$ 等式成立，即 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，下面证明对 $n+1$ 等式也成立，即证明：

$$1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

由归纳假设可得

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

于是

$$
\begin{aligned}
&1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 \\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\
&=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} \\
&=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}
$$

1.38 （1）归纳基础：当 $n=1$ 时，$1^3=1=\left(\frac{1\times(1+1)}{2}\right)^2$，等式成立.

（2）归纳步骤：假设对 $n(n\geqslant 1)$ 等式成立，即：

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

下面证明对 $n+1$ 等式也成立，即证明：

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

由归纳假设，$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$，所以

$$
\begin{aligned}
&1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3\\
&=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3\\
&=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3\\
&=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}\\
&=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}\\
&=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\\
&=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

1.39 (1) 归纳基础：当 $n=1$ 时，因为 $3|0$，所以 $3|(1^3-1)$，故结论成立.

(2) 归纳步骤：假设对 $n(n\geqslant 1)$ 结论成立，即 $3|(n^3-n)$，下面证明对 $n+1$ 结论也成立，即证明：$3|((n+1)^3-(n+1))$，而

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^3-(n+1)\\
&=n^3+3n^2+3n+1-n-1\\
&=n^3+3n^2+2n\\
&=n^3-n+n+3n^2+2n\\
&=(n^3-n)+3n^2+3n\\
&=(n^3-n)+3(n^2+n)
\end{aligned}
$$

由归纳假设可知，$3|(n^3-n)$，又 $3|3(n^2+n)$，所以，$3|((n^3-n)+3(n^2+n))$，即 $3|(n+1)^3-(n+1)$.

1.40 观察如下：

$$
\begin{aligned}
&a_0=1\\
&a_1=2a_0+1=2\times 1+1=3\\
&a_2=2a_1+1=2\times(2\times 1+1)+1=2^2+2+1=7\\
&a_3=2a_2+1=2\times(2^2+2+1)+1=2^3+2^2+2+1=15
\end{aligned}
$$

猜想

$$a_n=2^n+2^{n-1}+\cdots+2+1=2^{n+1}-1,\quad n\in\mathbf{N}$$

证明 用归纳法证明

归纳基础 当 $n=0$ 时，$a_0=2^1-1=1$. 等式成立.

归纳步骤 假设对 $n(n\geqslant 0)$ 等式成立，即 $a_n=2^{n+1}-1$. 于是，

$$a_{n+1}=2a_n+1=2(2^{n+1}-1)+1=2^{n+2}-1$$

即对 $n+1$ 等式成立. 得证 $a_n=2^{n+1}-1, n\in\mathbf{N}$.

1.41 不难看出 $A=\{3^n|n\in\mathbf{Z}^+\}$.

1.42 (1),(2),(5)属于 B,(3),(4)不属于 B.

分析 B 不可能用列举法表示，要用描述法表示也十分困难，而递归定义能够很简捷、严格地给出它的定义. 由此可以看到递归定义是一种非常重要的定义方法，在后面将多次使用.

第 2 章 命题逻辑

2.1 内容提要

1. 命题逻辑基本概念

命题与联结词：

命题与真值 命题、命题的真值、真命题、假命题、简单命题(或原子命题)、复合命题.

命题与真值的符号化 用 p,q,r 等表示命题,用数字 1 表示真,数字 0 表示假.

联结词及其符号化：

- "非(或否定)"符号化为 $\neg$,称其为否定联结词;
- "并且(或与)"符号化为 $\wedge$,称其为合取联结词;
- "或(相容或)"符号化为 $\vee$,称其为析取联结词;
- "如果,则"符号化为 $\rightarrow$,称其为蕴涵联结词;
- "当且仅当"符号化为 $\leftrightarrow$,称其为等价联结词.

记 $S=\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$,称 S 为常用联结词集.

基本复合命题：

- 否定式 $\neg p$,$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假;
- 合取式 $p\wedge q$,$p\wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同真;
- 析取式(相容或) $p\vee q$,$p\vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同假;
- 排斥或 $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$,$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$ 为真当且仅当 p 与 q 真值相异;
- 蕴涵式 $p\rightarrow q$,$p\rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真,q 为假;
- 等价式 $p\leftrightarrow q$,$p\leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 真值相同.

复合命题 基本复合命题,以及多次使用联结词集 S 中的联结词复合而成的命题. 排斥或可看成非基本复合命题的复合命题.

命题公式及其赋值：

命题常项与命题变项 命题常项是命题,命题变项是取值为 0 或 1 的变量,也用 $p,q,r,\cdots$ 表示.

命题公式 由命题变项和联结词按照一定规则形成的公式,也称合式公式或公式.

公式的赋值 给公式中变项指定真值,成真赋值、成假赋值、公式的真值表.

命题公式的类型 重言式(永真式)、矛盾式(永假式)、可满足式.

2. 命题逻辑等值演算

等值式与基本等值式:

等值式 若 $A \leftrightarrow B$ 为重言式,记为 $A \Leftrightarrow B$,并称 $A \Leftrightarrow B$ 为等值式.

基本的等值式:

双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$.

幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$;$A \wedge A \Leftrightarrow A$.

交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$;$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$.

结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$;

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$.

分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$;

$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$.

零律 $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$;$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$.

同一律 $A \vee 0 \Leftrightarrow A$;$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$.

排中律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$.

矛盾律 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$.

蕴涵等值式 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$.

等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

假言易位 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$.

等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$.

归谬论 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$.

等值演算 由已知的等值式推演出新的等值式的过程.

置换规则 若 $A \Leftrightarrow B$,则 $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.

联结词完备集:

真值函数 n 元真值函数 $F:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$. 任何含 n 个命题变项的公式 A,都与唯一的一个真值函数等值. 若公式 A 与 B 与同一个真值函数等值,则 $A \Leftrightarrow B$.

联结词完备集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$、$\{\neg, \wedge, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \rightarrow\}$、$\{\uparrow\}$、$\{\downarrow\}$等联结词完备集.

3. 范式

主要定义 文字、简单析取式、简单合取式、极小项、极大项、析取范式、公式的析取范式、合取范式、公式的合取范式、主析取范式、公式的主析取范式、主合取范式、公式的主合取范式.

定理 2.1 在命题逻辑中,任何公式都存在着唯一的与之等值的主析取范式与主合取范式.

求公式 A 的主析取范式的方法与步骤:

方法 1 等值演算法.

(1) 消去 A 中联结词$\rightarrow$,$\leftrightarrow$(若存在);
(2) 否定号$\neg$内移(利用德摩根律)或消去(利用双重否定律);
(3) 使用$\wedge$对$\vee$的分配律;
(4) 将不是极小项的简单合取式等值地化成若干个极小项的析取式;
(5) 将极小项用名称 m_i 表示,使用幂等律,最后排序.

方法 2 真值表法.
(1) 写出 A 的真值表;
(2) 求出 A 的全部成真赋值;
(3) 求出每个成真赋值对应的用名称表示的极小项,按角标从小到大析取.

求公式 A 的主合取范式的方法与步骤:

方法 1 等值演算法.

方法 2 真值表法.
(1) 写出 A 的真值表;
(2) 求出 A 的全部成假赋值;
(3) 求出每个成假赋值对应的极大项(用名称表示),按角标从小到大合取.

方法 3 由 A 的主析取范式求主合取范式.

主析取范式的用途 与真值表相同.

4. 推理

推理的形式结构:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \rightarrow B$$

正确推理的记法

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B$$

推理定律:

- **附加律** $A \Rightarrow (A \vee B)$;
- **化简律** $A \wedge B \Rightarrow A$;
- **假言推理** $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$;
- **拒取式** $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$;
- **析取三段论** $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$;
- **假言三段论** $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$;
- **等价三段论** $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$;
- **构造性二难** $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$;
- **破坏性二难** $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$.

推理规则:

- **前提引入规则;**
- **结论引入规则;**
- **置换规则;**
- **假言推理规则;**
- **附加规则;**
- **化简规则;**

- **拒取式规则;**
- **假言三段论规则;**
- **析取三段论规则;**
- **构造性二难规则;**
- **破坏性二难规则;**
- **合取引入规则.**

构造推理的证明:

推理的形式结构改写为:

前提: $A_1, A_2, \cdots, A_k$

结论: B

构造证明的方法:

- **直接证明法;**
- **附加前提证明法;**
- **归谬证明法;**
- **归结证明法.**

2.2 习　　题

2.1 下列语句中哪些是命题? 在是命题的语句中,哪些是真命题? 哪些是假命题? 哪些命题的真值现在还不知道?

(1) 2是素数吗?

(2) 17只能被1和它本身整除.

(3) 请别说话!

(4) 2+3=8.

(5) 真累呀!

(6) 宇宙间只有地球上有生命.

(7) 大偶数都是两个素数之和.

(8) $x+2=7$.

(9) $3+\sqrt{5}$.

(10) 喜马拉雅山最高.

2.2 写出下列各命题的真值,并指出哪些是简单命题.

(1) 177乘255之积是偶数.

(2) π 与$\sqrt{5}$都是无理数.

(3) 98与99是相邻的自然数.

(4) 长江与黄河是中国两条最长的河.

(5) 若 n 为自然数,则 n 与 $n+1$ 一个是奇数,一个是偶数.

(6) 6或9是偶数.

(7) 6或9是奇数.

2.3 设p:雪是白色的;

q：纽约是美国的首都.

求下列复合命题的真值.

(1) $\neg p \vee q$.

(2) $p \wedge \neg q$.

(3) $p \to q$.

(4) $\neg p \leftrightarrow q$.

(5) $(p \wedge q) \to (p \vee \neg q)$.

2.4　指出下列陈述句中,哪些是相容或?哪些是排斥或?并将它们符号化.

(1) 王志大是黑龙江或吉林人.

(2) 李小川生于1990年或1991年.

(3) 刘文虎现在在宿舍或在图书馆里.

(4) 4是偶数或是奇数.

(5) 自然数 n 是偶数,或自然数 m 是奇数.

(6) 张海燕去过美国或去过加拿大.

(7) 赵元元只能选学英语或只能选学法语.

2.5　将下列陈述句符号化.

(1) 刘丽华聪明用功.

(2) 李秀与张华都是东北人.

(3) 郑小虎一面吃饭,一面看电视.

(4) 2是偶素数.

(5) 虽然天气很冷,可人们情绪很高.

(6) 张小强不仅能吃苦,而且很能干.

(7) 李梅与李珊是亲姐妹.

(8) 赵志全与张钟山是同乡人.

2.6　设 p：王蓉努力学习,q：王蓉取得好成绩,将下列陈述句符号化.

(1) 只要王蓉努力学习,她就会取得好成绩.

(2) 王蓉取得好成绩,如果她努力学习.

(3) 只有王蓉努力学习,她才能取得好成绩.

(4) 除非王蓉努力学习,否则她不能取得好成绩.

(5) 假如王蓉不努力学习,她就不能取得好成绩.

(6) 王蓉取得好成绩,仅当她努力学习了.

2.7　将下列命题符号化,并指出各命题的真值.

(1) 若 $2+3=5$,则地球是方的.

(2) 若 $2+3=5$,则法国是欧洲国家.

(3) 若雪是黑色的,则$\sqrt{5}$是有理数.

(4) 若雪是黑色的,则$\sqrt{5}$是无理数.

2.8　将下列命题符号化,并指出它们的真值.

(1) $2>3$ 当且仅当 $5>7$.

(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$的充要条件是$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

(3) $2+2\neq4$ 与 $4+4=8$ 互为充要条件.

(4) 如果$\sqrt{2}$是无理数,则$\sqrt{3}$也是无理数,反之亦然.

2.9 将下列陈述语句符号化,并讨论真值.

(1) 若今天是1号,则明天是2号.

(2) 只有今天是1号,明天才是2号.

(3) 今天是1号当且仅当明天是2号.

(4) 若今天是1号,则明天是3号.

2.10 设p:俄罗斯的首都是莫斯科;

q:$2+5=7$;

r:日本位于北美洲.

求下列各复合命题的真值.

(1) $(p\wedge\neg q)\rightarrow r$.

(2) $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r$.

(3) $(\neg p\vee q\vee r)\wedge\neg r$.

(4) $(p\wedge q\wedge\neg r)\rightarrow(\neg p\vee\neg q\vee r)$.

2.11 当p、q的真值为0,r、s的真值为1时,求下列各公式的真值.

(1) $(p\vee(q\wedge r))\rightarrow(r\vee s)$.

(2) $(p\leftrightarrow r)\wedge(\neg q\vee s)$.

(3) $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\leftrightarrow(p\wedge q\wedge\neg r)$.

(4) $(\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s)\vee(p\wedge q\wedge r\wedge s)$.

2.12 用真值表判断下列公式的类型.

(1) $p\rightarrow(p\vee q\vee r)$.

(2) $\neg(\neg q\vee p)\wedge p$.

(3) $(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$.

(4) $(p\wedge r)\leftrightarrow\neg(p\vee q)$.

2.13 设p、q、r为任意的个体变项,用真值表验证:

(1) 结合律 $(p\vee q)\vee r\Leftrightarrow p\vee(q\vee r)$;

$(p\wedge q)\wedge r\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$.

(2) 分配律 $p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$;

$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$.

2.14 设p、q为任意的个体变项,用真值表验证:

(1) 吸收律 $p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p$,$p\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow p$.

(2) 同一律 $p\vee0\Leftrightarrow p$,$p\wedge1\Leftrightarrow p$.

(3) 归谬论 $(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q)\Leftrightarrow\neg p$.

2.15 用真值表证明下列蕴涵式为重言式.

(1) $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r)$.

(2) $((p\vee q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow r$.

2.16 用真值表证明:

(1) $(p \to q) \to r \not\Leftrightarrow p \to (q \to r)$.

(2) $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \land q) \to r$.

2.17 设 A、B、C 为任意的命题公式,则

(1) 若 $A \lor C \Leftrightarrow B \lor C$,$A \Leftrightarrow B$ 一定为真吗?

(2) 若 $A \land C \Leftrightarrow B \land C$,$A \Leftrightarrow B$ 一定为真吗?

(3) 若 $\neg A \Leftrightarrow \neg B$,$A \Leftrightarrow B$ 一定为真吗?

2.18 用等值演算法证明下列各式为重言式.

(1) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$.

(2) $((\neg p \lor q) \land (q \to r)) \to (\neg p \lor r)$.

2.19 用等值演算法证明下列各式为矛盾式.

(1) $\neg(p \to q) \land q \land r$.

(2) $\neg(p \to (p \lor q))$.

2.20 用等值演算法证明下面等值式.

(1) $((p \to q) \land (p \to r)) \Leftrightarrow (p \to (q \land r))$.

(2) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \lor q) \land \neg(p \land q))$.

2.21 将下面公式化成与之等值的并且仅含$\{\neg, \lor, \land\}$中联结词的公式.

(1) $p \to (q \to r)$.

(2) $\neg(p \to q) \lor r$.

(3) $p \leftrightarrow q$.

2.22 将下面公式化成与之等值的并且仅含$\{\neg, \land\}$中联结词的公式.

(1) $(p \land q) \lor \neg r$.

(2) $(p \to q) \to r$.

2.23 将下面公式化成与之等值的并且仅含$\{\neg, \lor\}$中联结词的公式.

(1) $p \land q \land \neg r$.

(2) $\neg p \land \neg(p \land r)$.

(3) $p \leftrightarrow q$.

2.24 将下面公式化成与之等值的并且仅含$\{\neg, \to\}$中联结词的公式.

(1) $p \lor q \lor r$.

(2) $(p \to q) \land \neg r$.

2.25 将下面公式化成与之等值的并且仅含联结词 $\uparrow$ 和仅含联结词 $\downarrow$ 的公式.

(1) $p \to q$.

(2) $\neg p \lor q$.

2.26 用等值演算法求下列公式的主析取范式,并求成真赋值.

(1) $(\neg p \to q) \to (\neg q \lor p)$.

(2) $\neg(\neg p \lor q) \land q$.

(3) $(p \lor (q \land r)) \to (p \lor q \lor r)$.

2.27 求题 2.26 中各小题的主合取范式,并求成假赋值.

2.28 通过求主析取范式,求下列公式的主合取范式.

(1) $(p \land q) \lor r$.

(2) $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)$.

2.29　用真值表求下列公式的主析取范式.

(1) $(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$.

(2) $(p\rightarrow q)\rightarrow(p\leftrightarrow\neg q)$.

2.30　用主析取范式判断下列各组公式是否等值.

(1) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$与$q\rightarrow(p\rightarrow r)$.

(2) $(p\rightarrow q)\rightarrow r$与$(p\wedge q)\rightarrow r$.

2.31　某公司要从赵、钱、孙、李、周5名新毕业的大学生中选派一些人出国学习,选派必须满足以下条件:

(1) 若赵去,钱也去.

(2) 李、周两人中必有一人去.

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人.

(4) 孙、李两人同去或同不去.

(5) 若周去,则赵、钱也同去.

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国?

2.32　设 p:王小川是文科生. q:王小川爱看小说.写出下面各推理的形式结构,并用真值表、主析取范式等方法判断下列各推理是否正确.

(1) 若王小川是文科生,则他爱看小说;王小川是文科生,所以他爱看小说.

(2) 若王小川爱看小说,则他是文科生;王小川是文科生,所以他爱看小说.

(3) 若王小川爱看小说,则他是文科生;王小川不是文科生,所以他不爱看小说.

2.33　有一盏灯由3个开关控制,要求按任何一个开关都能使灯由亮变黑或由黑变亮.试设计控制这盏灯的组合电路,写出它的逻辑表达式.

2.34　(1) 二进制半加器有2个输入 x 和 y,2个输出 s 和 c,其中 x 和 y 是被加数,s 是半和,c 是进位. 试写出 s 和 c 的逻辑表达式.

(2) 二进制全加器有3个输入 x,y 和 z,2个输出 s 和 c,其中 x 和 y 是被加数,z 是前一位的进位,s 是和,c 是进位. 试写出 s 和 c 的逻辑表达式.

2.35　构造下面各推理的证明.

(1) 前提:$\neg p\vee q, q\rightarrow r, \neg r$.

结论:$\neg p$.

(2) 前提:$p\rightarrow(q\rightarrow s), p\vee\neg r, q$.

结论:$r\rightarrow s$.

(3) 前提:$p\rightarrow q, p\rightarrow r$.

结论:$p\rightarrow(q\wedge r)$.

2.36　构造下面推理的证明.

小王学过英语或日语.如果小王学过英语,则他去过英国;如果他去过英国,他也去过日本,所以小王学过日语或去过日本.

2.37　构造下面推理的证明.

如果李淑敏是理科生,她一定学微积分;如果她不是文科学生,她一定是理科学生.她没学微积分,所以她是文科生.

2.38 用归谬法证明下面推理.

(1) 前提：$p \to \neg q, \neg r \vee q, r \wedge \neg s$.

结论：$\neg p$.

(2) 前提：$p \vee q, p \to r, q \to s$.

结论：$r \vee s$.

2.39 用归结法证明下面推理.

前提：$\neg p \to q, p \to r, r \to s$.

结论：$q \vee s$.

2.40 用归结法证明下面推理.

前提：$p, \neg p \vee r, \neg r \vee s$.

结论：s.

2.41 用归结法证明下面推理.

前提：$p \to (q \to s), r \to p, q$.

结论：$r \to s$.

2.42 用归结法证明下面推理.

如果周强是上海人，则他是复旦大学或中山大学的学生；如果他不想离开上海，他就不是中山大学学生；周强是上海人并且不想离开上海，所以他是复旦大学学生.

2.3 习题解答与分析

2.1 (2)、(4)、(6)、(7)、(10)为命题，其中(2)和(10)为真命题，(4)为假命题，(6)、(7)的真值现在还不知道.

分析 命题是具有唯一真值的陈述句. 本题中，(1)是疑问句，(3)是祈使句，(5)是感叹句，所以它们都不是陈述句，因而都不是命题.(9)不是句子，在这里没出现谓语(或表语)，因而(9)不是命题.(8)是陈述句，但它没有确定的真值，当 $x=5$ 时，$5+2=7$ 为真，而当 $x\neq5$ 时，$x+2=7$ 为假，故它是真值不确定的陈述句，因而(8)不是命题.

命题(2)是真命题. 因为 17 是素数(质数)，所以 17 的因子只有 1 和 17，故 17 只能被 1 和本身整除.

命题(4)是假命题. 因为 $2+3=5\neq8$.

命题(6)是具有唯一真值的陈述句，但它的真值现在还不能确定，但随着科学的发展，它的真值一定会知道的.

命题(7)是具有唯一真值的陈述句. 这个命题即为哥德巴赫猜想. 我国数学家陈景润等对哥德巴赫猜想作出了很大贡献，但到现在为止，此猜想并没有得到证明，可是它的真值是唯一的，因而它是命题. 随着时间的推移，这个猜想总会被证明是对的，或者是错的，那时客观存在的真值就会真相大白了.

(6)、(7)两个命题说明，命题的真值是客观存在的，与我们现在是否知道无关.

2.2 除(1)为假命题，其余 6 个命题全是真命题. 其中(1)、(3)、(4)是简单命题.

分析 命题(1)陈述句中，“177 乘 255”是主语，“是偶数”是谓语，因而陈述句“177 乘 255 是偶数”是简单陈述句，所以(1)中命题是简单命题，真值为假.

命题(2)为"π是无理数,并且$\sqrt{5}$是无理数"简化的叙述方式,是两个简单命题的合取式.可符号化为$p \wedge q$,其中,p:π是无理数,q:$\sqrt{5}$是无理数.因为p与q均为真命题,所以$p \wedge q$为真命题.

命题(3)中,"98与99"是主语,"是相邻的自然数"是谓词,因而命题(3)是简单命题.

命题(4)中,主语是"长江与黄河",谓语是"是中国两条最长的河",因而是简单命题.

若将命题改为"长江与黄河都是中国较长的河",则命题为复合命题,符号化为$p \wedge q$,其中,p:长江是中国较长的河,q:黄河是中国较长的河.

命题(5)是蕴涵式,其前件为"n是自然数",后件为"n与$n+1$一个是奇数,一个是偶数".符号化为$p \rightarrow ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$.其中,$p$:$n$为自然数,$q$:$n$为奇数($\neg q$:$n$为偶数),$r$:$(n+1)$为奇数($\neg r$:$(n+1)$为偶数).当前件$p$为假时,蕴涵式为真,当$p$为真时,后件也为真,所以此命题为真命题.

命题(6)符号化为$p \vee q$,其中,p:6是偶数,q:9是偶数.因为p为真,所以复合命题为真.

命题(7)符号化为$p \vee q$,其中,p:6是奇数,q:9是奇数.因为q为真,所以复合命题为真.

2.3 命题(1)~命题(5)的真值分别为0、1、0、1、1.

分析 这里只需注意p是真命题,即p的真值为1,$\neg p$的真值为0,q是假命题,即q的真值为0,$\neg q$的真值为1.

(1) $\neg p \vee q$的真值为0,即命题"雪不是白色的或纽约是美国的首都"是假命题.

(2) $p \wedge \neg q$的真值为1,即命题"雪是白色的并且纽约不是美国的首都"是真命题.

(3) $p \rightarrow q$的真值为0(前件为真,后件为假),即命题"如果雪是白色的,则纽约是美国的首都"是假命题.

(4) $\neg p \leftrightarrow q$的真值为1($\neg p$与q同为假),即命题"雪不是白色的当且仅当纽约是美国的首都"是真命题.

(5) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee \neg q)$的真值为1,即命题"若雪是白色的并且纽约是美国的首都,则雪是白色的或纽约不是美国的首都"是真命题.

2.4 只有(5)与(6)是相容或,其余的都是排斥或.它们的符号化分别为:

(1) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$,其中,$p$:王志大是黑龙江人,$q$:王志大是吉林人.

(2) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$,其中,$p$:李小川生于1990年,$q$:李小川生于1991年.

(3) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$,其中,$p$:刘文虎在宿舍里,$q$:刘文虎在图书馆里.

(4) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$,其中,$p$:4是偶数,$q$:4是奇数.

(5) $p \vee q$,其中,p:自然数n是偶数,q:自然数m是奇数.

(6) $p \vee q$,其中,p:张海燕去过美国,q:张海燕去过加拿大.

(7) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$,其中,$p$:赵元元选学英语,$q$:赵元元选学法语.

分析 ① 相容或($p \vee q$)与排斥或($(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$)的区别.当$p$、$q$的真值分别为0、0,0、1,1、0时,($p \vee q$)与($(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$)的真值都分别为0,1,1.只有在$p$、$q$分别为1、1时,($p \vee q$)的真值为1,而($(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$)的真值为0.

② 在(1)、(2)、(3)、(4)中的p与q都是互相排斥的,即p与q的真值不能同时为真(王志大不能同时为黑龙江人又为吉林人,李小川不能生于1990年又生于1991年,刘文虎不能

同时在宿舍和图书馆里)，即 p 与 q 的真值不能同时为 1. 所以(1)～(4)又可以符号化为 $p \vee q$. 但(7)中情况不同，赵元元可以又选学英语，又选学法语，即(7)中 p 与 q 可以同时为真，为了限制赵元元只选学一门外语，必须使用排斥或形式：$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$，而不能用 $p \vee q$ 形式.

2.5 (1) $p \wedge q$，其中，p：刘丽华聪明，q：刘丽华用功.

(2) $p \wedge q$，其中，p：李秀是东北人，q：张华是东北人.

(3) $p \wedge q$，其中，p：郑小虎吃饭，q：郑小虎看电视.

(4) $p \wedge q$，其中，p：2 是偶数，q：2 是素数.

(5) $p \wedge q$，其中，p：天气冷，q：人们情绪很高.

(6) $p \wedge q$，其中，p：张小强能吃苦，q：张小强能干.

(7) p，其中，p：李梅与李珊是亲姐妹.

(8) p，其中，p：赵志全与张钟山是同乡人.

分析 本题的目的有两个：

① 合取联结词 $\wedge$ 应用的灵活性. 在自然语言中，当用“和”、“与”、“并且”、“一面，一面”、“虽然……但是”、“不仅……而且”等将两个陈述语句联结起来时均使用联结词 $\wedge$. 有时，还将以上联结词省略，但符号化时，$\wedge$ 可不能省掉(例如本题中的(1)与(4)).

② 要注意“和”、“与”所联结的是两个陈述句，还是某个陈述句中的句子成分. 例如，本题中，(7)与(8)都是一个陈述句，而且是简单陈述句，其中“与”联结的是句子的主语成分，因而符号化时不出现联结词.

2.6 (1) $p \to q$.

(2) $p \to q$.

(3) $q \to p$ 或 $\neg p \to \neg q$.

(4) $\neg p \to \neg q$ 或 $q \to p$.

(5) $\neg p \to \neg q$ 或 $q \to p$.

(6) $q \to p$.

分析 本题练习蕴涵式“$p \to q$”的使用方法. 在 $p \to q$ 中，p 与 q 的逻辑关系是 q 是 p 的必要条件(p 是 q 的充分条件). q 是 p 的必要条件，有多种不同的叙述方法，例如：

① 如果 p，则 q；

② 只要 p，就 q；

③ 因为 p，所以 q；

④ p 仅当 q；

⑤ 只有 q，才 p；

⑥ 除非 q，否则非 p(除非 q，才 p)；

⑦ 假如没有 q，就没有 p.

……

在本题中，命题(1)为②的形式，命题(2)为①的形式，命题(3)为⑤的形式，命题(4)为⑥的形式，命题(5)为⑦的形式，命题(6)为④的形式.

注意 $\neg p \to \neg q$ 与 $q \to p$ 是等值的，均说明 p 是 q 的必要条件.

有时蕴涵式在叙述中并没有出现联结词，但由因果关系，也可以找到蕴涵式的前件与

后件.

例如:"吃一堑长一智"应符号化为 $p \to q$,其中,p:吃一堑,q:长一智.

还要注意的是,不能将充分条件与必要条件对调. 对于命题(3)与(4)不能符号化为 $p \to q$,这就将充分条件当成了必要条件. 在学习数学中,特别强调必要条件、充分条件、充分必要条件的概念.

例如:设 p:函数 $f(x)$在 x_0 连续,q:函数 $f(x)$当 $x \to x_0$ 时极限存在,命题"$p \to q$"是真命题,这说明极限存在是连续的必要条件,但不是充分条件,因为 $q \to p$ 不一定是真命题. 例如:$y=f(x)=\begin{cases} x+1 & x \neq 1 \\ 3 & x=1 \end{cases}$,则 y 在 $x=1$ 处有极限($\lim_{x \to 1} f(x)=2$),但因为 $\lim_{x \to 1} f(x)=2 \neq f(1)=3$. 所以 $f(x)$在 $x=1$ 处不连续.

2.7 (1) $p \to q$,其中,p:$2+3=5$(真命题),q:地球是方的(假命题),$p \to q$ 的真值为 0.

(2) $p \to q$,其中,p:$2+3=5$,q:法国是欧洲国家(真命题),$p \to q$ 的真值为 1.

(3) $p \to q$,其中,p:雪是黑色的(假命题),q:$\sqrt{5}$是有理数(假命题),$p \to q$ 的真值为 1.

(4) $p \to q$,其中,p:雪是黑色的,q:$\sqrt{5}$是无理数(真命题),$p \to q$ 为真命题,即 $p \to q$ 的真值为 1.

分析 本题的目的是通过实例说明蕴涵式 $p \to q$ 的真值取值情况. 由命题 p 和 q 组成的复合命题 $p \to q$,只有在 p 为真命题,q 为假命题时,才是假命题,见本题中的(1). 其他 3 种情况,即 p 与 q 同为真(见(2)),p 与 q 同为假(见(3)),p 为假,q 为真(见(4)),$p \to q$ 均为真.

2.8 (1) $p \leftrightarrow q$,其中,p:$2>3$,q:$5>7$,真值为 1.

(2) $p \leftrightarrow q$,其中,p:$\sqrt{2}+\sqrt{3}=5$,q:$\sqrt{2} \times \sqrt{3}=\sqrt{6}$,真值为 0.

(3) $\neg p \leftrightarrow q$,其中,p:$2+2=4$,q:$4+4=8$,真值为 0.

(4) $p \leftrightarrow q$,其中,p:$\sqrt{2}$是无理数,q:$\sqrt{3}$是无理数,真值为 1.

分析 本题的目的是通过实例说明等价式 $p \leftrightarrow q$ 的真值取值情况,p 与 q 的真值相同时,复合命题 $p \leftrightarrow q$ 为真命题(见(1)与(4)),其余情况为假命题(见(2)与(3)).

2.9 设 p:今天是 1 号,q:明天是 2 号,r:明天是 3 号,则:

(1) $p \to q$.

(2) $q \to p$.

(3) $p \leftrightarrow q$.

(4) $p \to r$.

分析 我们不知道 p、q、r 的真值,但是知道 p 与 q 同时为真或同时为假,根据蕴涵式取值情况可知,(1)、(2)、(3)的真值都是 1. 对于(4)来说,当 p 为真时,r 一定为假,于是 $p \to r$ 为假,而当 p 为假时,无论 r 为真或为假,$p \to r$ 均为真.

2.10 (1)~(4)的真值分别为 1、0、1、0.

分析 易知,p 与 q 为真命题,r 为假命题.

(1) $p \wedge \neg q$ 的真值为 0,故$(p \wedge \neg q) \to r$ 的真值为 1,因而$(p \wedge \neg q) \to r$ 为真命题.

(2) $p \leftrightarrow q$ 的真值为 1,r 真值为 0,因而$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ 为假命题.

类似讨论可知,(3)为真命题,(4)为假命题.

2.11 p、q 真值为0,r、s 真值为1时,(1)~(4)的真值分别为1、0、0、1.

分析 (1)~(4)都是含命题变项 p、q、r、s 的公式,它们都共有 $2^4=16$ 个赋值,其中0011是其中的一个赋值. 容易算出0011是(1)与(4)的成真赋值,是(2)与(3)的成假赋值.

2.12 (1)~(4)的真值表分别如表2.1~表2.4所示.

表2.1 $p\to(p\vee q\vee r)$ 的真值表

p	q	r	$p\vee q\vee r$	$p\to(p\vee q\vee r)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

表2.2 $\neg(\neg q\vee p)\wedge p$ 的真值表

p	q	$\neg q\vee p$	$\neg(\neg q\vee p)$	$\neg(\neg q\vee p)\wedge p$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

表2.3 $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$ 的真值表

p	q	$p\to q$	$\neg q\to\neg p$	$(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

表2.4 $(p\wedge r)\leftrightarrow\neg(p\vee q)$ 的真值表

p	q	r	$p\wedge r$	$\neg(p\vee q)$	$(p\wedge r)\leftrightarrow\neg(p\vee q)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0

由真值表可知,题(1)与题(3)为重言式,题(2)为矛盾式,题(4)为可满足式,成真赋值为010、011、100、110.

题2.13和题2.14都要求用真值表验证两个公式是否等值问题，而 $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，又当且仅当在任何赋值下 A 与 B 有相同的真值表，因而只需写出 A 与 B 的真值表，就可以知道 $A \leftrightarrow B$ 的真值表，从而可知 $A \leftrightarrow B$ 是否为重言式，于是可不写出 $A \leftrightarrow B$ 的真值表就可判定 $A \Leftrightarrow B$ 是否为真.

2.13　这里只给出题(1)与题(2)中的第一式的真值表(见表2.5和表2.6).

表2.5　$((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ 的真值表

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

由表2.5的最后两列可知，$(p \vee q) \vee r$ 与 $p \vee (q \vee r)$ 的真值表相同，从而 $((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ 是重言式，即 $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

表2.6　$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ 的真值表

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

由表2.6最后两列可知 $p \vee (q \wedge r)$ 与 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 有相同的真值表，从而 $(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ 是重言式，即 $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

2.14　这里只验证吸收律的第一式，同一律的第一式以及归谬论. 它们的真值表分别由表2.7、表2.8和表2.9列出.

表2.7　$(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$ 的真值表

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

由表2.7的最后一列可知，$(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$ 为重言式，因而 $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$. 其实，可

不写表 2.7 的最后一列，由第 1 列与第 3 列可知：$p\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow p$.

表 2.8　$(p\vee 0)\leftrightarrow p$ 的真值表

p	$p\vee 0$	$(p\vee 0)\leftrightarrow p$
0	0	1
1	1	1

由表 2.8 可知，$(p\vee 0)\leftrightarrow p$ 为重言式，因而 $p\vee 0\Leftrightarrow p$.

表 2.9　$((p\to q)\wedge(p\to\neg q))\leftrightarrow\neg p$ 的真值表

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\to q$	$p\to\neg q$	$(p\to q)\wedge(p\to\neg q)$	$((p\to q)\wedge(p\to\neg q))\leftrightarrow\neg p$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

由表 2.9 可知，$(p\to q)\wedge(p\to\neg q)\Leftrightarrow\neg p$，即归谬论为真.

2.15　表 2.10 和表 2.11 分别列出了题(1)与题(2)中公式的真值表.

表 2.10　$(p\to q)\wedge(q\to r)\to(p\to r)$ 的真值表

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$p\to r$	$(p\to q)\wedge(p\to r)\to(p\to r)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

由表 2.10 可知，$(p\to q)\wedge(q\to r)\to(p\to r)$ 为重言式，因而可将它记为：$(p\to q)\wedge(q\to r)\Rightarrow(p\to r)$，这是假言三段论推理规则的一个代入实例.

表 2.11　$((p\vee q)\wedge(p\to r)\wedge(q\to r))\to r$ 的真值表

p	q	r	$p\vee q$	$p\to r$	$q\to r$	$((p\vee q)\wedge(p\to r)\wedge(q\to r))\to r$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

由表 2.11 可知，$((p\vee q)\wedge(p\to r)\wedge(q\to r))\to r$ 为重言式，因而可记为 $(p\vee q)\wedge(p\to r)\wedge(q\to r)\Rightarrow r$，这是构造性二难推理的代入实例，而且是特殊情况. 在构造性二难推理

$(A\to B)\land(C\to D)\land(A\lor C)\Rightarrow(B\lor D)$中，$p$与$q$代换$A$和$C$，$r$代换$B$和$D$，即得$(p\lor q)\land(p\to r)\land(q\to r)\Rightarrow r$.

2.16 (1) 要证明$(p\to q)\to r\not\Leftrightarrow p\to(q\to r)$，只需证明$((p\to q)\to r)\leftrightarrow(p\to(q\to r))$不是重言式. 该公式的真值表如表2.12所示.

表2.12 $((p\to q)\to r)\leftrightarrow(p\to(q\to r))$的真值表

p	q	r	$(p\to q)\to r$	$p\to(q\to r)$	$((p\to q)\to r)\leftrightarrow(p\to(q\to r))$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

由表2.12可知，000，010为公式的成假赋值，所以$((p\to q)\to r)\leftrightarrow(p\to(q\to r))$不是重言式，因而$((p\to q)\to r)$与$(p\to(q\to r))$不等值，即

$$((p\to q)\to r)\not\Leftrightarrow(p\to(q\to r))$$

因此可知蕴涵联结词不满足结合律.

(2) 要证明$p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\land q)\to r$，只需证明$(p\to(q\to r))\leftrightarrow((p\land q)\to r)$为重言式. 表2.13列出了它的真值表.

表2.13 $(p\to(q\to r))\leftrightarrow((p\land q)\to r)$的真值表

p	q	r	$p\to(q\to r)$	$(p\land q)\to r$	$(p\to(q\to r))\leftrightarrow((p\land q)\to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

由表2.13可知，$(p\to(q\to r))\leftrightarrow((p\land q)\to r)$为重言式，因而$p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\land q)\to r$.

2.17 (1) 若$A\lor C\Leftrightarrow B\lor C$，$A\Leftrightarrow B$不一定为真.

分析 ① 当C为矛盾式时，若$A\lor C\Leftrightarrow B\lor C$，则必有$A\Leftrightarrow C$. 由于$C$为矛盾式，因而$A\lor C\Leftrightarrow A$，$B\lor C\Leftrightarrow B$，所以，若$A\lor C\Leftrightarrow B\lor C$，则$A\Leftrightarrow B$.

② 当C不是矛盾式时，若$A\lor C\Leftrightarrow B\lor C$，$A\Leftrightarrow B$不一定为真. 下面举反例证明之. 设$A$、$B$、$C$都是含两个命题变项$p$、$q$的公式，且$A=p\land\neg q$，$B=(p\land\neg q)\lor(p\land q)$，$C=(\neg p\land q)\lor(p\land q)$，$A$、$B$、$C$以及$A\lor C$、$B\lor C$的真值表如表2.14所示.

表 2.14　A、B、C、$A\lor C$、$B\lor C$ 的真值表

p	q	A	B	C	$A\lor C$	$B\lor C$
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1

由表 2.14 可知，$A\lor C\Leftrightarrow B\lor C$，但 $A\not\Leftrightarrow B$.

其实，只要取 $C=A\lor B$，就恒有 $A\lor C\Leftrightarrow B\lor C$，而不管 $A\Leftrightarrow B$ 是否为真.

(2) 若 $A\land C\Leftrightarrow B\land C$，$A\Leftrightarrow B$ 不一定为真.

分析　① 当 C 为重言式时，若 $A\land C\Leftrightarrow B\land C$，则 $A\Leftrightarrow B$ 为真. 此时 $A\land C\Leftrightarrow A$，$B\land C\Leftrightarrow B$，所以，若 $A\land C\Leftrightarrow B\land C$，必有 $A\Leftrightarrow B$.

② 当 C 不是重言式时，若 $A\land C\Leftrightarrow B\land C$，$A\Leftrightarrow B$ 不一定为真. 下面举反例如下：为方便起见，仍设 A、B、C 均为含 p、q 的命题公式，设 $A=(\neg p\land q)\lor(p\land q)$，$B=(p\lor q)\land(p\lor\neg q)$，$C=p\leftrightarrow q$，$A$、$B$、$C$ 以及 $A\land C$，$B\land C$ 的真值表为表 2.15 所示.

从表 2.15 可以看出，$A\land C\Leftrightarrow B\land C$，但 $A\not\Leftrightarrow B$.

表 2.15　A、B、C、$A\land C$、$B\land C$ 的真值表

p	q	A	B	C	$A\land C$	$B\land C$
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

(3) 若 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$，$A\Leftrightarrow B$ 一定为真，证明如下.

设 A、B 中含 n 个命题变项. 设 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为 A 的成真赋值，则 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为 $\neg A$ 的成假赋值，由于 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$，所以，$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为 $\neg B$ 的成假赋值，即 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为 B 的成真赋值. 类似地，若 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 为 A 的成假赋值，可推出它也是 B 的成假赋值，所以 $A\Leftrightarrow B$.

还应该指出，$A\Leftrightarrow B$，也必有 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$ 为真. 因而结论为 $A\Leftrightarrow B$ 当且仅当 $\neg A\Leftrightarrow\neg B$.

2.18　用等值演算法证明公式 A 为重言式，只需证明 $A\Leftrightarrow 1$.

(1) 在演算中写出每步所用的演算规律.

$$
\begin{aligned}
&(p\to q)\to(\neg q\to\neg p) \\
\Leftrightarrow&(\neg p\lor q)\to(\neg\neg q\lor\neg p) &&(\text{蕴涵等值式})\\
\Leftrightarrow&(\neg p\lor q)\to(\neg p\lor q) &&(\text{德摩根律、交换律})\\
\Leftrightarrow&\neg(\neg p\lor q)\lor(\neg p\lor q) &&(\text{蕴涵等值式})\\
\Leftrightarrow&1 &&(\text{排中律})
\end{aligned}
$$

由以上演算结果可知，$(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$ 为重言式.

类似可证 $(\neg q\to\neg p)\to(p\to q)$ 为重言式，从而 $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$ 为重言式，即 $p\to q\Leftrightarrow\neg q\to\neg p$. 这正说明，若原命题 $p\to q$ 为真，则它的逆否命题也为真，反之亦然.

(2) $((\neg p\vee q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(\neg p\vee r)$

$\Leftrightarrow\neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg q\vee r))\vee(\neg p\vee r)$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg r)\vee\neg p\vee r$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow((p\wedge\neg q)\vee\neg p)\vee((q\wedge\neg r)\vee r)$ (交换、结合律)

$\Leftrightarrow(\neg q\vee\neg p)\vee(q\vee r)$ (分配、排中、同一律)

$\Leftrightarrow(\neg q\vee q)\vee\neg p\vee r$ (交换、结合律)

$\Leftrightarrow 1\vee\neg p\vee r$ (排中律)

$\Leftrightarrow 1$ (零律)

分析 由以上演算可知,题(2)中公式为重言式,并注意到

$$((\neg p\vee q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(\neg p\vee r)$$
$$\Leftrightarrow((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)\quad(\text{蕴涵等值式})$$

可知,$((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$也为重言式,这正是推理理论中的假言三段论的代换实例.

2.19 证明公式A为矛盾式,只需证明$A\Leftrightarrow 0$.

(1) $\neg(p\rightarrow q)\wedge q\wedge r$

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\wedge q\wedge r$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\wedge q\wedge r$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow p\wedge(\neg q\wedge q)\wedge r$ (结合律)

$\Leftrightarrow p\wedge 0\wedge r$ (矛盾律)

$\Leftrightarrow 0$ (零律)

(2) $\neg(p\rightarrow(p\vee q))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee p\vee q)$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow\neg(1\vee q)$ (排中律)

$\Leftrightarrow\neg 1$ (零律)

$\Leftrightarrow 0$

分析 从演算中不难发现,$p\rightarrow(p\vee q)$为重言式.

2.20 用等值演算法证明$A\Leftrightarrow B$,通常有以下4种方法:

方法1 证明$A\leftrightarrow B$为重言式;

方法2 从A出发经过等值演算得B;

方法3 从B出发经过等值演算得A;

方法4 证明$A\Leftrightarrow C\wedge B\Leftrightarrow C$,则得$A\Leftrightarrow B$.

人们常用方法2与方法3,方法1演算步骤较多.

(1) 这里用上述4种方法证明.

方法1 证明$((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r))\leftrightarrow(p\rightarrow(q\wedge r))$为重言式.

$((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r))\leftrightarrow(p\rightarrow(q\wedge r))$

$\Leftrightarrow((\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r))\leftrightarrow(\neg p\vee(q\wedge r))$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow(\neg p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow(\neg p\vee(q\wedge r))$ (分配律)

$\Leftrightarrow 1$

分析 对于任何公式A来说,均有$A\Leftrightarrow A$,即$A\leftrightarrow A$为重言式,所以,以上演算利用了这

个结果，使演算步骤简化多了.

方法 2 从左到右演算.

$$(p \to q) \wedge (p \to r)$$
$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \quad \text{(蕴涵等值式)}$$
$$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r) \quad \text{(分配律)}$$
$$\Leftrightarrow p \to (q \wedge r) \quad \text{(蕴涵等值式)}$$

方法 3 从右到左演算.

$$p \to (q \wedge r)$$
$$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r) \quad \text{(蕴涵等值式)}$$
$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \quad \text{(分配律)}$$
$$\Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r) \quad \text{(蕴涵等值式)}$$

方法 4 证明左、右都等值于某公式 C.

左： $(p \to q) \wedge (p \to r)$
$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \quad \text{(蕴涵等值式)}$$
$$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r) \quad \text{(分配律)}$$

右： $p \to (q \wedge r)$
$$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge r) \quad \text{(蕴涵等值式)}$$

在这里公式 C 为 $\neg p \vee (q \wedge r)$.

说明 一般只要采取一种方法证明即可，当然要找简单的方法. 常用的方法是方法 2 与方法 3.

(2) 从左到右证明.

$$\neg (p \leftrightarrow q)$$
$$\Leftrightarrow \neg ((p \to q) \wedge (q \to p)) \quad \text{(等价等值式)}$$
$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \quad \text{(蕴涵等值式)}$$
$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) \quad \text{(分配律)}$$
$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \wedge \neg q) \vee 0 \vee 0 \vee (p \wedge q)) \quad \text{(矛盾律)}$$
$$\Leftrightarrow \neg ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)) \quad \text{(同一律)}$$
$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q) \quad \text{(德摩根律)}$$

若从右到左证明，也要经过 6 到 7 步.

2.21 将某公式 A 等值地化成某联结词完备集中的公式，所得公式的形式可能不唯一，但它们都应该彼此等值(因为它们都与 A 等值).

(1) $p \to (q \to r)$
$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \quad \text{(蕴涵等值式)}$$
$$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee r \quad \text{(结合律)}$$

后两步得到的公式都是$\{\neg, \vee, \wedge\}$中的公式.

(2) $\neg (p \to q) \vee r$
$$\Leftrightarrow \neg (\neg p \vee q) \vee r \quad \text{(蕴涵等值式)}$$
$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r \quad \text{(德摩根律)}$$

后两步得到的公式均为$\{\neg, \vee, \wedge\}$中的公式.

(3) $p \leftrightarrow q$

$\Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$ （等价等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ （交换律）

后两步所得公式均为$\{\neg, \vee, \wedge\}$中的公式.

2.22 (1) 演算中要使用双重否定律.

$(p \wedge q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow \neg\neg((p \wedge q) \vee \neg r)$ （双重否定律）

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r)$ （德摩根律）

最后一步所得公式为$\{\neg, \wedge\}$中的公式,演算中关键步骤为双重否定律.

(2) $(p \to q) \to r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow \neg\neg((p \wedge \neg q) \vee r)$ （双重否定律）

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg r)$ （德摩根律）

最后一步所得公式为$\{\neg, \wedge\}$中的公式.

2.23 (1) 演算中要使用双重否定律.

$p \wedge q \wedge \neg r$

$\Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q \wedge \neg r)$ （双重否定律）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q \vee r)$ （德摩根律）

最后一步所得公式为$\{\neg, \vee\}$中的公式.

(2) $\neg p \wedge \neg(p \wedge r)$

$\Leftrightarrow \neg p \wedge (\neg p \vee \neg r)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow \neg(p \vee \neg(\neg p \vee \neg r))$ （德摩根律）

最后一步所得公式为$\{\neg, \vee\}$中公式.

(3) $(p \leftrightarrow q)$

$\Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$ （等价等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow \neg\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p))$ （双重否定律）

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$ （德摩根律）

最后一步所得公式为$\{\neg, \vee\}$中公式.

2.24 (1) 本小题给出 $p \vee q \vee r$ 两个等值形式的$\{\neg, \to\}$中的公式.

$p \vee q \vee r$

$\Leftrightarrow (\neg\neg p \vee q) \vee r$ （双重否定律、结合律）

$\Leftrightarrow (\neg p \to q) \vee r$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow \neg\neg(\neg p \to q) \vee r$ （双重否定律）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \to q) \to r$ （蕴涵等值式）

又 $p \vee q \vee r$

$\Leftrightarrow \neg\neg p \vee (\neg\neg q \vee r)$ （双重否定律）

$\Leftrightarrow \neg p \to (\neg q \to r)$ （蕴涵等值式）

(2) $(p \to q) \wedge \neg r$

$\Leftrightarrow \neg \neg ((p \to q) \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg (p \to q) \vee r)$

$\Leftrightarrow \neg ((p \to q) \to r)$

最后一步所得公式为$\{\neg, \to\}$中的公式.

2.25 在以下演算中常用幂等律.

(1) $p \to q$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow \neg \neg (\neg p \vee q)$ （双重否定律）

$\Leftrightarrow \neg (p \wedge \neg q)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow p \uparrow \neg q$ （$\uparrow$的定义）

$\Leftrightarrow p \uparrow \neg (q \wedge q)$ （幂等律）

$\Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$ （$\uparrow$的定义）

$p \uparrow (q \uparrow q)$已为$\{\uparrow\}$中的公式.

又 $p \to q$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow \neg \neg (\neg p \vee q)$ （双重否定律）

$\Leftrightarrow \neg (\neg p \downarrow q)$ （$\downarrow$的定义）

$\Leftrightarrow \neg (\neg (p \vee p) \downarrow q)$ （幂等律）

$\Leftrightarrow \neg ((p \downarrow p) \downarrow q)$ （$\downarrow$定义）

$\Leftrightarrow \neg (((p \downarrow p) \downarrow q) \vee ((p \downarrow p) \downarrow q))$ （幂等律）

$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$ （$\downarrow$定义）

最后一步所得公式为$\{\downarrow\}$中的公式.

(2) 由(1)中演算可知：

$\neg p \vee q$

$\Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$ （$\{\uparrow\}$中公式）

$\Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$ （已为$\{\downarrow\}$中公式）

2.26 (1) $(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \to (\neg q \vee p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow \neg (p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee p$ （德摩根律、结合律）

$\Leftrightarrow \neg q \vee p$ （吸收律）

$\Leftrightarrow ((p \vee \neg p) \wedge \neg q) \vee (p \wedge (\neg q \vee q))$ （排中律）

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ （分配律）

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$

成真赋值为00、10、11.

(2) $\neg (\neg p \vee q) \wedge q$

$\Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge q$ （德摩根律、双重否定律）

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \wedge q)$ (结合律)

$\Leftrightarrow p \wedge 0$ (矛盾律)

$\Leftrightarrow 0$ (零律)

该公式为矛盾式,故无成真赋值.

(3) $(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r)$

$\Leftrightarrow \neg (p \vee (q \wedge r)) \vee p \vee q \vee r$ (蕴涵等值式、结合律)

$\Leftrightarrow \neg p \wedge (\neg q \vee \neg r) \vee p \vee q \vee r$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (p \vee q) \vee r$ (分配律、结合律)

$\Leftrightarrow (\neg (p \vee q) \vee (p \vee q)) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee r$ (德摩根、交换、结合律)

$\Leftrightarrow 1 \vee ((\neg p \wedge \neg r) \vee r)$ (排中律)

$\Leftrightarrow 1$ (零律)

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

由演算结果可知,公式为重言式,全部赋值都是成真赋值.

分析 在(3)的演算中,如果不用(德摩根、交换、结合律)这一步,演算过程将是很长的,需要将$(\neg p \wedge \neg q)$、$(\neg p \wedge \neg r)$、p、q、r全派生出极小项,共12个极小项,然后用幂等律得到8个极小项.

2.27 解本题可以用以下两种方法.

方法1 等值演算法.

(1) $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p)$

$\Leftrightarrow \neg (p \vee q) \vee \neg q \vee p$ (蕴涵等值式、双重否定律)

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee p$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow (p \vee \neg q)$ (吸收律、交换律)

$\Leftrightarrow M_1$

成假赋值为01.

(2) $\neg (\neg p \vee q) \wedge q$

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \wedge q)$ (德摩根律、双重否定律、结合律)

$\Leftrightarrow p \wedge 0$ (矛盾律)

$\Leftrightarrow 0$ (零律)

$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3$

成假赋值为00、01、10、11.

(3) 由题2.26可知

$$(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow (p \vee q \vee r) \Leftrightarrow 1$$

由于公式为重言式,所以主合取范式为1,无成假赋值.

方法2 用题2.26给出的主析取范式,立即可求出各公式的主合取范式. 为方便起见,设(1)、(2)、(3)中公式分别为A、B、C. 利用题2.26的结果求A、B、C的主合取范式.

(1) 易知,$\neg A \Leftrightarrow m_1$,而

$$A \Leftrightarrow \neg (\neg A) \Leftrightarrow \neg m_1 \Leftrightarrow M_1$$

(2) $\neg B \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$，于是，

$$\begin{aligned} B &\Leftrightarrow \neg(\neg B) \\ &\Leftrightarrow \neg(m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3) \\ &\Leftrightarrow \neg m_0 \wedge \neg m_1 \wedge \neg m_2 \wedge \neg m_3 \\ &\Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \end{aligned}$$

(3) $\neg C \Leftrightarrow 0$

$$C \Leftrightarrow \neg(\neg C) \Leftrightarrow \neg 0 \Leftrightarrow 1$$

C 的主合取范式为 1，无成假赋值.

2.28　设(1)与(2)中公式分别为 A 和 B.

(1) $A=(p \wedge q) \vee r$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge (\neg r \vee r)) \vee ((\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge r) && \text{（排中律、同一律）} \\ &\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\ &\quad \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) && \text{（分配律）} \\ &\Leftrightarrow m_6 \vee m_7 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \\ &\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 && \text{（交换律、幂等律）} \end{aligned}$$

于是

$$\neg A \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_4$$

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$$

(2) $B=(p \to q) \wedge (q \to r)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) && \text{（蕴涵等值式）} \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (q \wedge r) && \text{（分配律、零律）} \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\ &\quad \vee (p \wedge q \wedge r) && \text{（排中律、同一律、幂等律）} \\ &\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7 \end{aligned}$$

于是

$$\neg B \Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6$$

$$B \Leftrightarrow \neg(\neg B) \Leftrightarrow M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

分析　其实，对于任意命题公式 A，只要求出了 A 的主析取范式，就知道了 A 的所有成真赋值，因而也就知道了 A 的成假赋值，每个成假赋值对应一个极大项，所有成假赋值对应的极大项的合取式即为 A 的主合取范式. 在本题(1)中，求出 A 的主析取范式之后，可知，000、010、100 是 A 的成假赋值，它们对应的极大项分别为 M_0、M_2、M_4，因而 A 的主合取范式为 $M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$. 对(2)中公式可类似讨论.

另外，若知道公式 A 的主合取范式，就知道了 A 的全部成假赋值，从而知道 A 的全部成真赋值，所有成真赋值对应的全体极小项的析取式即为 A 的主析取范式.

2.29　(1)中公式的真值表如表 2.16 所示.

由表 2.16 可知，题(1)中公式的成真赋值为 001、011、110、111，它们对应的极小项分别为 m_1、m_3、m_6、m_7，所以，$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$ 的主析取范式为 $m_1 \vee m_3 \vee m_6 \vee m_7$. 由真值表也立刻可知，它的主合取范式为 $M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5$.

题(2)中公式的真值表如表 2.17 所示.

表 2.16 $(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$的真值表

p	q	r	$p\wedge q$	$\neg p\wedge r$	$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1

表 2.17 $(p\rightarrow q)\rightarrow(p\leftrightarrow\neg q)$的真值表

p	q	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow\neg q$	$(p\rightarrow q)\rightarrow(p\leftrightarrow\neg q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

由表2.17可知,题(2)中公式的成真赋值为01和10,它们对应的极小项为m_1和m_2,所以题(2)中公式的主析取范式为$m_1\vee m_2$,即

$$(p\rightarrow q)\rightarrow(p\leftrightarrow\neg q)\Leftrightarrow m_1\vee m_2$$

又不难看出,题(2)中公式的主合取范式为$M_0\wedge M_3$.

2.30 因为任何命题公式的主析取范式都是唯一的,因而$A\Leftrightarrow B$当且仅当A与B有相同的主析取范式和主合取范式.

设$A=p\rightarrow(q\rightarrow r)$,$B=q\rightarrow(p\rightarrow r)$,$C=(p\rightarrow q)\rightarrow r$,$D=(p\wedge q)\rightarrow r$. 先求出$A$、$B$、$C$、$D$的主析取范式,方法可以不限. 这里用等值演算法求主析取范式,请填出每步所用的演算规律.

$$\begin{aligned}A &= p\rightarrow(q\rightarrow r)\\&\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee r\\&\Leftrightarrow M_6\\&\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= q\rightarrow(p\rightarrow r)\\&\Leftrightarrow\neg q\vee\neg p\vee r\\&\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee r\\&\Leftrightarrow M_6\\&\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= (p\rightarrow q)\rightarrow r\\&\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee r\\&\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee r\\&\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge(\neg r\vee r))\vee((\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r)\\&\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\end{aligned}$$

$\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_4\vee m_5\vee m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$D=(p\wedge q)\rightarrow r$

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee r$

$\Leftrightarrow M_6$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

由以上演算可知,A、B、D 有相同的主析取范式. 于是,$A\Leftrightarrow B$,而 $C\not\Leftrightarrow D$.

2.31　设 p: 派赵出国,q: 派钱出国,r: 派孙出国,s: 派李出国,t: 派周出国,则各条件分别符号化为:

(1) $p\rightarrow q$.

(2) $(s\vee t)$.

(3) $(q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r)$.

(4) $(r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s)$.

(5) $t\rightarrow(p\wedge q)$.

要求满足各条件,因而要求(1)～(5)的合取式为真. 设

$$A=(p\rightarrow q)\wedge(s\vee t)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$$
$$\wedge((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))\wedge(t\rightarrow(p\wedge q))$$

为了求出各派遣方案,应求出 A 的主析取范式,主析取范式中含的极小项个数为派遣方案数,由各极小项的成真赋值给出如何派法. 所以要求出 A 的主析取范式.

下面给出求 A 的主析取范式的主要步骤:

$$A\Leftrightarrow((\neg p\vee q)\wedge(s\vee t))\wedge(((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$$
$$\wedge((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s)))\wedge(\neg t\vee(p\wedge q))$$
$$\Leftrightarrow((\neg p\wedge s)\vee(\neg p\wedge t)\vee(q\wedge s)\vee(q\wedge t))$$
$$\wedge((q\wedge\neg r\wedge\neg s)\vee(\neg q\wedge r\wedge s))\wedge(\neg t\vee(p\wedge q))$$
$$\Leftrightarrow((\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge t)$$
$$\vee(q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge t))\wedge(\neg t\vee(p\wedge q))$$
$$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg t)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge t)$$
$$\Leftrightarrow m_6\vee m_{25}$$

易知,成真赋值为 00110 与 11001.

方案 1: 孙、李出国,而赵、钱、周不去.

方案 2: 赵、钱、周出国,而孙、李不去.

2.32　此问题应分下面几步解答.

① 将给定的语句符号化(本题已给出).

② 写出推理的形式结构:

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_k\rightarrow B\qquad(*)$$

③ 判断(*)是否为重言式,方法很多,如等值演算法、真值表法、主析取范式法、构造证明法(对正确的推理)、找成假赋值(对不正确的推理)等.

(1) 推理的形式结构为

$$(p \to q) \land p \to q \qquad (*)_1$$

可以用多种方法证明$(*)_1$为重言式. 这里给出等值演算法的证明:

$$\begin{aligned}
&(p \to q) \land p \to q \\
\Leftrightarrow &(\neg p \lor q) \land p \to q && \text{(蕴涵等值式)} \\
\Leftrightarrow &(\neg p \land p) \lor (q \land p) \to p && \text{(分配律)} \\
\Leftrightarrow &(q \land p) \to p && \text{(矛盾律、同一律)} \\
\Leftrightarrow &\neg (q \land p) \lor p && \text{(蕴涵等值式)} \\
\Leftrightarrow &\neg q \lor (\neg p \lor p) && \text{(德摩根律、结合律)} \\
\Leftrightarrow &\neg q \lor 1 && \text{(排中律)} \\
\Leftrightarrow &1 && \text{(零律)}
\end{aligned}$$

由于$(*)_1$为重言式,所以推理正确.

其实,由假言推理定律,立即可知,推理正确.

(2) 推理形式结构为

$$(q \to p) \land p \to q \qquad (*)_2$$

这里用主析取范式法判断$(*)_2$是否为重言式.

$$\begin{aligned}
&(q \to p) \land p \to q \\
\Leftrightarrow &(\neg q \lor p) \land p \to q && \text{(蕴涵等值式)} \\
\Leftrightarrow &p \to q && \text{(吸收律)} \\
\Leftrightarrow &\neg p \lor q && \text{(蕴涵等值式)} \\
\Leftrightarrow &M_2 && \text{(主合取范式)} \\
\Leftrightarrow &m_0 \lor m_1 \lor m_3 && \text{(主析取范式)}
\end{aligned}$$

由于$(*)_2$的主析取范式不含全部4个极小项,所以$(*)_2$不是重言式,10是成假赋值,所以推理不正确.

(3) 推理的形式结构为

$$(q \to p) \land \neg p \to \neg q \qquad (*)_3$$

由于$(*)_3$是拒取式的代入实例,所以$(*)_3$正确. 当然也可以用其他方法证明$(*)_3$为重言式.

分析 通过本题的判断过程,可以总结出以下几点结论:

① 若某推理的形式结构是某条推理定律的代入实例,则立刻可知推理正确,例如本题的(3).

② 若能观察出某推理的形式结构的成假赋值,则立刻可知对应的推理不正确,如本题中的(2).

③ 若看不出是①或②的情况,就用等值演算法、主析取范式法、真值表等方法判断;还可以用构造推理的证明来说明推理正确.

2.33 设x,y,z表示3个开关,$F=1$表示灯亮,$F=0$表示灯黑. 不妨设当$x=y=z=1$时灯亮. F与x,y,z的关系如表2.18所示. 于是,由F的成真赋值,

$$F=(\neg x \land \neg y \land z) \lor (\neg x \land y \land \neg z) \lor (x \land \neg y \land \neg z) \lor (x \land y \land z)$$

表 2.18

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
F	0	1	1	0	1	0	0	1

2.34 (1) s 和 c 的真值表如表 2.19 所示. 于是

$$s=(\neg x\wedge y)\vee(x\wedge\neg y)$$

$$c=x\wedge y$$

(2) s 和 c 的真值表如表 2.20 所示. 于是

$$s=(\neg x\wedge\neg y\wedge z)\vee(\neg x\wedge y\wedge\neg z)\vee(x\wedge\neg y\wedge\neg z)\vee(x\wedge y\wedge z)$$

$$c=(\neg x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge\neg y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge\neg z)\vee(x\wedge y\wedge z)$$

表 2.19

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
s	0	1	1	0
c	0	0	0	1

表 2.20

x	0	0	0	0	1	1	1	1
y	0	0	1	1	0	0	1	1
z	0	1	0	1	0	1	0	1
s	0	1	1	0	1	0	0	1
t	0	0	0	1	0	1	1	1

2.35 (1) 证明:

① $q\to r$ 前提引入

② $\neg r$ 前提引入

③ $\neg q$ ①、②拒取式

④ $\neg p\vee q$ 前提引入

⑤ $\neg p$ ③、④析取三段论

(2) 直接证明法:

① $p\to(q\to s)$ 前提引入

② $\neg p\vee(\neg q\vee s)$ ①置换

③ $\neg q\vee(\neg p\vee s)$ ②置换

④ q 前提引入

⑤ $\neg p\vee s$ ③、④析取三段论

⑥ $p\to s$ ⑤置换

⑦ $p\vee\neg r$ 前提引入

⑧ $r\to p$ ⑦置换

⑨ $r\to s$ ⑧、⑥假言三段论

附加前提证明法:

① r 附加前提引入

② $p\vee\neg r$ 前提引入

③ p ①、②析取三段论

④ $p\to(q\to s)$ 前提引入

⑤ $q \to s$　　③、④假言推理

⑥ q　　前提引入

⑦ s　　⑤、⑥假言推理

(3) 直接证明法：

① $p \to q$　　前提引入

② $p \to r$　　前提引入

③ $(p \to q) \land (p \to r)$　　①、②合取

④ $(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor r)$　　③置换

⑤ $\neg p \lor (q \land r)$　　④置换

⑥ $p \to (q \land r)$　　⑤置换

附加前提证明法：

① p　　附加前提引入

② $p \to q$　　前提引入

③ q　　①、②假言推理

④ $p \to r$　　前提引入

⑤ r　　①、④假言推理

⑥ $q \land r$　　③、⑤合取

分析　① 构造推理的证明时，证明序列并不唯一，只要证明的每一步都是按推理规则进行的，则所得到的证明序列都是有效的. 例如在本题(1)中，若对①中公式使用置换规则就得到$\neg q \lor r$，证明序列中就不用拒取式推理规则了. 类似地，若对④中公式使用置换规则，则得到公式 $p \to q$，证明中就不用使用析取三段论规则了.

② 若推理的结论由蕴涵式给出，构造证明时，就可以用直接证明法证明，也可以使用附加前提证明法证明. 不过，一般说来，附加前提证明法证明序列较短，并且易于思考.

2.36　(1) 将简单语句符号化：

p：小王学过英语；q：小王学过日语；

r：小王去过英国；s：小王去过日本.

(2) 前提：$p \lor q, p \to r, r \to s$；

结论：$q \lor s$.

(3) 构造证明：

① $p \to r$　　前提引入

② $r \to s$　　前提引入

③ $p \to s$　　①、②假言三段论

④ $p \lor q$　　前提引入

⑤ $\neg\neg q \lor p$　　④置换

⑥ $\neg q \to p$　　⑤置换

⑦ $\neg q \to s$　　⑥、③假言三段论

⑧ $q \lor s$　　⑦ 置换

2.37　(1) 将简单语句符号化：

p：李淑敏是理科生；q：李淑敏是文科生；

r：李淑敏学微积分.

（2）前提：$p \to r, \neg q \to p, \neg r$；

结论：q.

（3）构造证明：

① $p \to r$　　前提引入

② $\neg r$　　前提引入

③ $\neg p$　　①、②拒取式

④ $\neg q \to p$　　前提引入

⑤ q　　③、④拒取式

问：若在以上的证明中，不使用拒取式，应如何证明？

可证明如下：

① $\neg q \to p$　　前提引入

② $p \to r$　　前提引入

③ $\neg q \to r$　　①、②假言三段论

④ $q \vee r$　　③置换

⑤ $\neg r$　　前提引入

⑥ q　　④、⑤析取三段论

再问：若在第二个证明中既不使用拒取式，也不使用假言三段论，应如何证明？

可证明如下：

① $\neg q \to p$　　前提引入

② $q \vee p$　　①置换

③ $p \to r$　　前提引入

④ $\neg p \vee r$　　③置换

⑤ $\neg r$　　前提引入

⑥ $\neg p$　　④、⑤析取三段论

⑦ q　　②、⑥析取三段论

在以上的证明中，步骤数分别为5、6、7，可见第一个证明最好.

2.38　(1)

① p　　结论的否定引入

② $p \to \neg q$　　前提引入

③ $\neg q$　　①、②假言推理

④ $\neg r \vee q$　　前提引入

⑤ $\neg r$　　③、④析取三段论

⑥ $r \wedge \neg s$　　前提引入

⑦ r　　⑥化简

⑧ $\neg r \wedge r$　　⑤、⑦合取

由于⑧为矛盾式，所以原推理正确.

(2)

① $\neg(r \vee s)$　　结论的否定引入

② $\neg r \land \neg s$　　①置换
③ $\neg r$　　②化简
④ $\neg s$　　②化简
⑤ $p \to r$　　前提引入
⑥ $\neg p$　　③、⑤拒取式
⑦ $q \to s$　　前提引入
⑧ $\neg q$　　④、⑦拒取式
⑨ $p \lor q$　　前提引入
⑩ p　　⑧、⑨析取三段论
⑪ $\neg p \land p$　　⑥、⑩合取

由于⑪为矛盾式,所以推理正确.

分析　对于本题,对于(1)用直接证明法比归谬法简单,对于(2),用归结证明法简单.

(1) 用直接证明法证明:

① $r \land \neg s$　　前提引入
② r　　①化简
③ $\neg r \lor q$　　前提引入
④ q　　②、③析取三段论
⑤ $p \to \neg q$　　前提引入
⑥ $\neg p$　　④、⑤拒取式

(2) 用归结法证明:

首先将诸前提及结论的否定化成简单析取式,把前提改写为

前提: $p \lor q$, $\neg p \lor r$, $\neg q \lor s$, $\neg r$, $\neg s$.

证明:

① $p \lor q$　　前提引入
② $\neg p \lor r$　　前提引入
③ $q \lor r$　　①、②归结
④ $\neg q \lor s$　　前提引入
⑤ $r \lor s$　　③、④归结
⑥ $\neg r$　　前提引入
⑦ s　　⑤、⑥归结
⑧ $\neg s$　　前提引入
⑨ 0　　⑦、⑧归结

由以上证明可知,归结法是比较好的证明方法.

2.39　先将诸前提及结论的否定化成简单析取式,把前提改写成

前提: $p \lor q$, $\neg p \lor r$, $\neg r \lor s$, $\neg q$, $\neg s$.

证明:

① $p \lor q$　　前提引入
② $\neg p \lor r$　　前提引入
③ $q \lor r$　　①、②归结

④ $\neg r \vee s$　　　　前提引入

⑤ $q \vee s$　　　　③、④归结

⑥ $\neg q$　　　　前提引入

⑦ s　　　　⑤、⑥归结

⑧ $\neg s$　　　　前提引入

⑨ 0　　　　⑦、⑧归结

说明　(1) 用归结法证明时，结论都是 0，不需要写出.

(2) 结论的否定 $\neg(q \vee s) \Leftrightarrow \neg q \wedge \neg s$，它有 2 个极小项 $\neg q$ 和 $\neg s$，故在前提中添加了 $\neg q$ 和 $\neg s$.

(3) 对⑤、⑥使用归结规则时，应将 $\neg q$ 看成 $\neg q \vee 0$. 类似地，对⑦、⑧使用归结规则时，将 s 看成 $s \vee 0$，$\neg s$ 看成 $\neg s \vee 0$.

2.40　本题的前提与结论的否定已是简单析取式，把前提改写成

前提：p，$\neg p \vee r$，$\neg r \vee s$，$\neg s$.

证明：

① p　　　　前提引入

② $\neg p \vee r$　　　　前提引入

③ r　　　　①、②归结

④ $\neg r \vee s$　　　　前提引入

⑤ s　　　　③、④归结

⑥ $\neg s$　　　　前提引入

⑦ 0　　　　⑤、⑥归结

分析　本题可用直接证明法证明如下.

① p　　　　前提引入

② $\neg p \vee r$　　　　前提引入

③ r　　　　①、②析取三段论

④ $\neg r \vee s$　　　　前提引入

⑤ s　　　　③、④析取三段论

2.41　先将诸前提及结论的否定化成简单析取式，把前提改为

前提：$\neg p \vee \neg q \vee s$，$\neg r \vee p$，$q$，$r$，$\neg s$.

证明：

① $\neg p \vee \neg q \vee s$　　　　前提引入

② q　　　　前提引入

③ $\neg p \vee s$　　　　①、②归结

④ $\neg r \vee p$　　　　前提引入

⑤ $\neg r \vee s$　　　　③、④归结

⑥ r　　　　前提引入

⑦ s　　　　⑤、⑥归结

⑧ $\neg s$　　　　前提引入

⑨ 0　　　　⑦、⑧归结

分析 本题也可用直接证明法或附加前提证明法,见下面的证明.

用附加前提证明法证明:

① r 附加前提引入

② $r \to p$ 前提引入

③ p ①、②假言推理

④ $p \to (q \to s)$ 前提引入

⑤ $q \to s$ ③、④假言推理

⑥ q 前提引入

⑦ s ⑤、⑥假言推理

用直接证明法证明:

① $p \to (q \to s)$ 前提引入

② $q \to (p \to s)$ ①置换

③ q 前提引入

④ $p \to s$ ②、③假言推理

⑤ $r \to p$ 前提引入

⑥ $r \to s$ ④、⑤假言三段论

2.42 (1) 将简单语句符号化.

令:p:周强是上海人,q:周强是复旦大学的学生,r:周强是中山大学的学生,s:周强想离开上海.

(2) 前提:$p \to (q \vee r)$,$\neg s \to \neg r$,$p \wedge \neg s$;

结论:q.

(3) 将诸前提及结论的否定化成简单析取式,把前提改写为

前提:$\neg p \vee q \vee r$,$s \vee \neg r$,p,$\neg s$,$\neg q$.

证明:

① $\neg p \vee q \vee r$ 前提引入

② p 前提引入

③ $q \vee r$ ①、②归结

④ $s \vee \neg r$ 前提引入

⑤ $\neg s$ 前提引入

⑥ $\neg r$ ④、⑤归结

⑦ q ③、⑥归结

⑧ $\neg q$ 前提引入

⑨ 0 ⑦、⑧归结

分析 本题也可用直接证明法证明.

① $p \wedge \neg s$ 前提引入

② p ①化简

③ $\neg s$ ①化简

④ $p \to (q \lor r)$	前提引入
⑤ $q \lor r$	②、④假言推理
⑥ $\neg s \to \neg r$	前提引入
⑦ $\neg r$	③、⑥假言推理
⑧ q	⑤、⑦析取三段论

第 3 章 一阶逻辑

3.1 内容提要

1. 一阶逻辑基本概念

个体词 个体常项、个体变项、个体域、有限个体域、全总个体域.

谓词 谓词常项、谓词变项、1 元谓词(表示事物性质)、$n(n\geqslant 2)$元谓词(表示事物之间的关系)、0 元谓词、特性谓词.

量词 全称量词、存在量词.

命题符号化 设 D 为个体域.

(1)“D 中所有 x 都有性质 F”,符号化为

$$\forall x F(x)$$

(2)“D 中存在 x 具有性质 F”,符号化为

$$\exists x F(x)$$

(3)“对 D 中所有 x 而言,如果 x 有性质 F,则 x 就有性质 G”,符号化为

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

(4)“D 中存在 x 具有性质 F,又有性质 G”,符号化为

$$\exists x(F(x)\wedge G(x))$$

(5)“对于 D 中的所有 x 和 y 而言,若 x 有性质 F,y 有性质 G,则 x 与 y 有关系 H”,符号化为

$$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$$

(6)“对于 D 中所有 x 而言,若 x 具有性质 F,就存在 y 有性质 G,并且 x 与 y 有关系 H”,符号化为

$$\forall x(F(x)\rightarrow \exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$$

(7)“存在 D 中的 x 有性质 F,并且对 D 中所有 y 而言,如果 y 有性质 G,则 x 与 y 就有关系 H”,符号化为

$$\exists x(F(x)\wedge \forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$$

(8)“D 中存在着 x 与 y,x 有性质 F,y 有性质 G,并且 x 与 y 有关系 H”,符号化为

$$\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge H(x,y))$$

一阶逻辑公式、解释与赋值、分类:

一阶语言 $\mathscr{L}$ 字母表、项、原子公式、合式公式(公式)、指导变元、量词的辖域、自由出现的个体变项、约束出现的个体变项、闭式及性质、公式的解释与赋值、永真式(逻辑有效式)、

矛盾式(永假式)、可满足式、代换实例.

2. 一阶逻辑等值演算

一阶逻辑等值式与基本等值式：

等值式　$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为永真式.

基本等值式：

第一组　命题逻辑重言式的代换实例.

第二组　一阶逻辑中的重要等值式：

(1) 量词否定等值式：

① $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$；

② $\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$.

(2) 量词辖域收缩与扩张等值式，$A(x)$中 x 是自由出现的，B 中不含 x 的自由出现，则有下面 8 个等值式：

① $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$；

② $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$；

③ $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$；

④ $\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$；

⑤ $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$；

⑥ $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$；

⑦ $\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$；

⑧ $\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$.

(3) 量词分配等值式：

① $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$；

② $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.

一阶逻辑等值演算的 2 个规则：

(1) 置换规则.

(2) 换名规则.

一阶逻辑前束范式：

(1) 前束范式.

(2) 与公式 A 等值的前束范式(也称 A 的前束范式).

(3) 求给定公式 A 的前束范式：利用重要的等值式、置换规则、换名规则等，对给定公式 A 进行等值演算，直到求出与 A 等值的前束范式.

当个体域为有限集 $D=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$时，可以消去量词，将 $\forall x A(x)$写成 $A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)$，$\exists x A(x)$写成 $A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$.

3.2 习　　题

3.1　设个体域为实数集 $\mathbf{R}$，$F(x)$：$x>5$，求下列 0 元谓词的真值.

(1) $F(5)$.　　(2) $F(\sqrt{2})$.　　(3) $F(-2)$.　　(4) $F(\sqrt{6})$.

(5) $F(\sqrt{27})$.　　(6) $F(7.9)$.

3.2　设个体域 $D=\{x \mid x$ 为英语单词$\}$,令 $F(x)$:x 含字母 c.求下列各0元谓词的真值.

(1) $F(\text{about})$　　(2) $F(\text{call})$　　(3) $F(\text{error})$　　(4) $F(\text{erect})$

3.3　将下列命题用0元谓词符号化.

(1) 王小山来自山东省或河北省.

(2) 除非李联不怕吃苦,否则她不会取得这样好的成绩.

(3) $\sqrt{2}$不是有理数.

(4) 3大于2仅当3大于4.

3.4　设个体域为 $D=\{x \mid x$ 是人$\}$, $L(x,y)$:x 喜欢 y.将下列命题符号化.

(1) 所有的人都喜欢赵小宝.

(2) 所有的人都喜欢某些人.

(3) 没有人喜欢所有的人.

(4) 每个人都喜欢自己.

3.5　设个体域为全总个体域,又令 $M(x)$:x 是人.将题3.4中4个命题符号化.

3.6　在一阶逻辑中将下面命题符号化,并分别讨论个体域限制为(a)、(b)条件时命题的真值.

(1) 凡整数都能被2整除.

(2) 有的整数能被2整除.

其中,(a) 个体域为整数集合;(b) 个体域为实数集合.

3.7　设个体域为整数集 $\mathbf{Z}$, $L(x,y)$:$x+y=x-y$,求下列各式的真值.

(1) $L(1,1)$.　　(2) $L(2,0)$.

(3) $\forall y L(1,y)$.　　(4) $\exists x L(x,2)$.

(5) $\exists x \exists y L(x,y)$.　　(6) $\forall x \exists y L(x,y)$.

(7) $\exists y \forall x L(x,y)$.　　(8) $\forall x \forall y L(x,y)$.

3.8　在一阶逻辑中将下面命题符号化,并分别讨论个体域限制为(a)、(b)条件时命题的真值.

(1) 对于任意的 x,均有 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

(2) 存在 x,使得 $x+5=9$.

其中,(a) 个体域为自然数集合;(b) 个体域为实数集合.

3.9　设个体域为整数集 $\mathbf{Z}$,确定下列各公式的真值.

(1) $\forall x(x^2>0)$.　　(2) $\exists x(x^2=0)$.

(3) $\forall x(x^2 \geqslant x)$.　　(4) $\forall x \exists y(x^2<y)$.

(5) $\exists x \forall y(x<y^2)$.　　(6) $\forall x \exists y(x+y=0)$.

(7) $\exists x \exists y(x^2+y^2=6)$.　　(8) $\forall x \forall y \exists z(z=(x+y)/2)$.

3.10　在一阶逻辑中将下列命题符号化.

(1) 没有不吃饭的人.

(2) 在北京卖菜的人不全是东北人.

(3) 自然数全是整数.

(4) 有的人天天锻炼身体.

3.11　在一阶逻辑中将下列命题符号化.

(1) 火车都比汽车快.

(2) 有的火车比有的汽车快.

(3) 不存在比所有火车都快的汽车.

(4) 说凡是汽车就比火车慢是不对的.

3.12　将下列命题符号化,个体域为实数集合 **R**,并指出各命题的真值.

(1) 对所有的 x,都存在 y,使得 $x \cdot y=0$.

(2) 存在着 x,对所有的 y 都有 $x \cdot y=0$.

(3) 对所有 x,都存在着 y,使得 $y=x+1$.

(4) 对所有的 x 和 y,都有 $x \cdot y=y \cdot x$.

3.13　将下列各公式翻译成自然语言,个体域为整数集 **Z**,并判断各命题的真假.

(1) $\forall x \forall y \exists z(x-y=z)$.　　　(2) $\forall x \exists y(x \cdot y=1)$.

(3) $\exists x \forall y \forall z(x+y=z)$.

3.14　指出下列公式中的指导变元、量词的辖域、各个体变项的自由出现和约束出现.

(1) $\forall x(F(x) \to G(x,y))$.

(2) $\forall x F(x,y) \to \exists y G(x,y)$.

(3) $\forall x \exists y(F(x,y) \wedge G(y,z)) \vee \exists x H(x,y,z)$.

3.15　给定解释 I 如下:

(a) 个体域 D_I 为实数集 **R**.

(b) $\bar{a}=0$.

(c) $\bar{f}(x,y)=x-y, x,y \in D_I$.

(d) $\bar{F}(x,y)$: $x=y$, $\bar{G}(x,y)$: $x<y, x,y \in D_I$.

说明下列公式在 I 下的含义,并指出各公式的真值.

(1) $\forall x \forall y(G(x,y) \to \neg F(x,y))$.

(2) $\forall x \forall y(F(f(x,y),a) \to G(x,y))$.

(3) $\forall x \forall y(G(x,y) \to \neg F(f(x,y),a))$.

(4) $\forall x \forall y(G(f(x,y),a) \to F(x,y))$.

3.16　给定解释 I 如下:

(a) 个体域 $D=\mathbf{N}$($\mathbf{N}$ 为自然数集).

(b) $\bar{a}=2$.

(c) D 上函数 $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=x \cdot y$.

(d) D 上谓词 $\bar{F}(x,y)$: $x=y$.

及赋值 σ: $\sigma(x)=0$, $\sigma(y)=1$, $\sigma(z)=2$.

说明下列各式在 I 及 σ 下的含义,并讨论其真值.

(1) $\forall x F(g(x,a),y)$.

(2) $\forall x(F(f(x,a),y) \to \forall y F(f(y,a),x))$.

(3) $\forall x \forall y \exists z F(f(x,y),z)$.

(4) $\exists xF(f(x,y),g(x,z))$.

3.17　判断下列各式的类型.

(1) $F(x,y)\rightarrow(G(x,y)\rightarrow F(x,y))$.

(2) $\forall x(F(x)\rightarrow F(x))\rightarrow\exists y(G(y)\wedge\neg G(y))$.

(3) $\forall x\exists yF(x,y)\rightarrow\exists y\forall xF(x,y)$.

(4) $\exists x\forall yF(x,y)\rightarrow\forall y\exists xF(x,y)$.

(5) $\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(y,x))$.

(6) $\neg(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$.

(7) $\exists xF(x,y)$.

(8) $\exists xF(x,y)\rightarrow\forall yF(x,y)$.

3.18　(1) 给出一个非闭式的永真式.

(2) 给出一个非闭式的永假式.

(3) 给出一个非闭式的可满足式,但不是永真式.

3.19　证明下面公式既不是永真式也不是矛盾式.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$.

(2) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$.

3.20　将下列各式的否定号内移,使得否定号只能出现在谓词前.

(1) $\neg\exists x\exists yL(x,y)$.

(2) $\neg\forall x\forall yL(x,y)$.

(3) $\neg\exists x(F(x)\wedge\forall y\neg L(x,y))$.

(4) $\neg\forall x(\exists yL(x,y)\vee\forall yH(x,y))$.

3.21　将下列公式化成与之等值的公式,使其没有既是约束出现的,又是自由出现的个体变项.

(1) $\forall xF(x,y)\wedge\exists yG(x,y,z)$.

(2) $\exists x(F(x,y)\wedge\forall yG(x,y))$.

3.22　证明:

(1) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x))\not\Leftrightarrow\forall x(A(x)\wedge B(x))$.

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\not\Leftrightarrow\exists x(A(x)\rightarrow B(x))$.

其中,$A(x)$和$B(x)$为含x自由出现的公式.

3.23　设个体域$D=\{a,b\}$,消去下列各公式中的量词.

(1) $\forall x\exists y(F(x)\wedge G(y))$.

(2) $\forall x\exists y(F(x)\wedge G(x,y))$.

(3) $\exists xF(x)\wedge\forall xG(x)$.

(4) $\exists x(F(x,y)\vee\forall yG(y))$.

3.24　设个体域$D=\{a,b,c\}$,消去下列各公式中的量词.

(1) $\forall xF(x)\rightarrow\forall yG(y)$.

(2) $\forall x(F(x,y)\rightarrow\exists yG(y))$.

3.25　设个体域$D=\{1,2\}$,请给出两种不同的解释I_1和I_2,使得下面公式在I_1下都是真命题,而在I_2下都是假命题.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$.

(2) $\exists x(F(x)\land G(x))$.

3.26　给定公式 $A=\exists xF(x)\rightarrow\forall xF(x)$.

(1) 在解释 I_1 中,个体域 $D_1=\{a\}$,证明公式 A 在 I_1 下的真值为 1.

(2) 在解释 I_2 中,个体域 $D_2=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$n\geqslant 2$,$A$ 在 I_2 下的真值还一定是 1 吗?为什么?

3.27　给定解释 I 如下:

(a) 个体域 $D=\{3,4\}$.

(b) $\bar{f}(x)$为$\bar{f}(3)=4$,$\bar{f}(4)=3$.

(c) $\bar{F}(x,y)$为 $\bar{F}(3,3)=\bar{F}(4,4)=0$,$\bar{F}(3,4)=\bar{F}(4,3)=1$.

试求下列公式在 I 下的真值.

(1) $\forall x\exists yF(x,y)$.

(2) $\exists x\forall yF(x,y)$.

(3) $\forall x\forall y(F(x,y)\rightarrow F(f(x),f(y)))$.

3.28　在一阶逻辑中将下面命题符号化,要求用两种不同的等值形式.

(1) 没有小于负数的正数.

(2) 相等的两个角未必都是对顶角.

3.29　求下列各式的前束范式.

(1) $\exists xF(x)\rightarrow\forall yG(x,y)$.

(2) $\forall x(F(x,y)\rightarrow\forall yG(x,y,z))$.

3.30　求下列各式的前束范式.

(1) $F(x)\land G(x)\rightarrow L(x,y)$.

(2) $\forall x_1(F(x_1)\rightarrow G(x_1,x_2))\rightarrow(\exists x_2H(x_2)\rightarrow\exists x_3L(x_2,x_3))$.

(3) $\exists x_1F(x_1,x_2)\rightarrow(H(x_1)\rightarrow\neg\exists x_2G(x_1,x_2))$.

3.31　将下列命题符号化,要求符号化的公式为前束范式.

(1) 有的汽车比有的火车跑得快.

(2) 有的火车比所有的汽车跑得快.

(3) 说所有的火车比所有汽车都跑得快是不对的.

(4) 说有的飞机比有的汽车慢是不对的.

3.32　求下列各公式的前束范式.

(1) $\exists xF(x)\lor\exists xG(x)\lor L(x,y)$.

(2) $\neg(\forall xF(x)\lor\forall xG(x))$.

3.3　习题解答与分析

3.1　(1)~(4)的真值为 0,(5)与(6)的真值为 1.

分析　这里的 1 元谓词 $F(F(x)$: $x>5$, $x\in\mathbf{R})$为谓词常项,所以(1)~(6)全为命题.由于 $5,\sqrt{2},-2,\sqrt{6}$全都小于或等于 5,所以(1)~(4)为假命题.而 $\sqrt{27}$和 7.9 均大于 5,所以(5)与(6)均为真命题.

3.2　(1)与(3)的真值为0,(2)与(4)的真值为1.

分析　这里的1元谓词F($F(x)$:x含字母c)为谓词常项,所以(1)～(4)全为命题,其中,(1)与(3)中单词不含字母c,所以为假命题,而(2)与(4)中单词含字母c,所以为真命题.

3.3　(1) 设$F(x)$:x来自山东省,$G(x)$:x来自河北省,a:王小山.命题符号化为

$$(F(a)\wedge\neg G(a))\vee(\neg F(a)\wedge G(a))\text{或}F(a)\vee G(a)$$

(2) 设$F(x)$:x怕吃苦,$G(x)$:x取得好成绩,a:李联.命题符号化为

$$G(a)\rightarrow\neg F(a)\text{或}F(a)\rightarrow\neg G(a)$$

(3) 设$F(x)$:x是有理数,命题符号化为

$$\neg F(\sqrt{2})$$

(4) 设$F(x,y)$:$x>y$,命题符号化为

$$F(3,2)\rightarrow F(3,4)$$

分析　(1)中命题的真值要根据王小山来自哪个省而定.若他既不是来自山东省,也不是来自河北省,则命题为假.若他真来自山东省或河北省,则命题为真,但不可能既来自山东省又来自河北省,所以既可以符号化为排斥或,又可以符号化为相容或.

对于(2)中命题,注意“李联取得好成绩”的必要条件是“李联不怕吃苦”.

另外,还应注意,(1)与(2)的真值要根据具体情况而定.而(3)和(4)的真值是确定的,(3)是真命题,而(4)是假命题.

3.4　设二元谓词$L(x,y)$:x喜欢y.

(1) 设a:赵小宝,命题符号化为

$$\forall xL(x,a)$$

(2) $\forall x\exists yL(x,y)$.

(3) $\neg\exists x\forall yL(x,y)$.

(4) $\forall xL(x,x)$.

3.5　设$M(x)$:x为人,$L(x,y)$:x喜欢y.

(1) 设a:赵小宝.$\forall x(M(x)\rightarrow L(x,a))$.

(2) $\forall x(M(x)\rightarrow\exists y(M(y)\wedge L(x,y)))$.

(3) $\neg\exists x(M(x)\wedge\forall y(M(y)\rightarrow L(x,y)))$.

(4) $\forall x(M(x)\rightarrow L(x,x))$.

分析　题3.4与题3.5说明:同一个命题在不同的个体域下,可有不同形式的符号化形式,当然,也可能有相同的符号化形式.设有命题“自然数都是整数”,

① 个体域$D_1=\mathbf{R}$($\mathbf{R}$为实数集),命题符号化为

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

其中,$F(x)$:x为自然数,$G(x)$:x为整数.

② 个体域$D_2=\mathbf{Q}$($\mathbf{Q}$为有理数集),命题符号化为

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

$F(x)$,$G(x)$的含义同①.

③ 个体域$D_3=\mathbf{N}$($\mathbf{N}$为自然数集),命题符号化为

$$\forall xG(x)$$

$G(x)$的含义同①.

D_1、D_2、D_3 不同，命题"自然数都是整数"在 D_1 与 D_2 下，符号化形式相同，但在 D_3 下的符号化形式与 D_1 与 D_2 下的符号化形式不同.

3.6 (a) 个体域为整数集合：

(1) $\forall xF(x)$，其中，$F(x)$：x 能被 2 整除. 真值为 0. 例如，3 为整数，但 2 不能整除 3.

(2) $\exists xF(x)$，$F(x)$同(1). 真值为 1. 所有的偶数都是整数，它们都能被 2 整除.

(b) 个体域为实数集：

(1) $\forall x(G(x)\rightarrow F(x))$，其中，$G(x)$：$x$ 为整数，$F(x)$：x 能被 2 整除，其真值为 0.

(2) $\exists x(G(x)\wedge F(x))$，其中，$G(x)$、$F(x)$同(1)，其真值为 1.

3.7 (1)、(3)、(4)、(8)的真值为 0，而(2)、(5)、(6)、(7)的真值为 1.

分析 (1) 因为 $1+1\neq 1-1$，所以 $L(1,1)$为假.

(2) 因为 $2+0=2-0$，所以 $L(2,0)$为真.

(3) 对于除 0 以外的任何 y，均有 $1+y\neq 1-y$，所以，$\forall yL(1,y)$为假.

(4) 对于任意的 x，都有 $x+2\neq x-2$，所以，$\exists xL(x,2)$为假.

(5) 取 $y=0$，均有 $x+0=x-0$，所以 $\exists x\exists yL(x,y)$为真.

(6) 取 $y=0$，对于任何 x，均有 $x+0=x-0$，故有 $\forall x\exists yL(x,y)$为真.

(7) 取 $y=0$，则 $\forall xL(x,0)$(即 $\forall x(x+0=x-0)$)为真，故 $\exists y\forall xL(x,y)$为真.

(8) 只要 $y\neq 0$，就有 $x+y\neq x-y$，所以，$\forall x\forall yL(x,y)$为假.

3.8 设 $F(x)$：$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$，$G(x)$：$x+5=9$.

(a) (1) $\forall xF(x)$，其真值为 0.

(2) $\exists xG(x)$，其真值为 1.

(b) (1) $\forall xF(x)$，其真值为 1.

(2) $\exists xG(x)$，其真值为 1.

分析 本题说明，在不同个体域中，同一个命题的符号化形式可能相同，但真值可能不同.

3.9 (1)、(7)、(8)的真值为 0；(2)、(3)、(4)、(5)、(6)的真值为 1.

分析 (1) 因为 $0\in\mathbf{Z}$，而 $0^2=0$，所以 $\forall x(x^2>0)$为假命题.

(2) 因为 $0\in\mathbf{Z}$，且 $0^2=0$，所以 $\exists x(x^2=0)$为真命题.

(3) $\forall x\in\mathbf{Z}$，若 $x=0$，则 $0^2=0$，若 $x\neq 0$，则 $x^2>x$，所以命题 $\forall x(x^2\geqslant x)$为真命题.

(4) 对于任意的 $x\in\mathbf{Z}$，取 $y=x^2+1$，则 $y\in\mathbf{Z}$，并且 $x^2<y$，所以 $\forall x\exists y(x^2<y)$为真命题.

(5) 取 x 为负整数，比如 $x=-1$，则对于任意整数 y，均有 $-1<y^2$，所以 $\exists x\forall y(x<y^2)$为真命题.

(6) 对于任意的 $x\in\mathbf{Z}$，若 $x=0$，则取 $y=0$，若 $x\neq 0$，则取 $y=-x$，均有 $x+y=0$，所以 $\forall x\exists y(x+y=0)$为真命题.

(7) 在整数集合 $\mathbf{Z}$ 中，不存在 x,y，使得 $x^2+y^2=6$，所以 $\exists x\exists y(x^2+y^2=6)$为假命题.

(8) 当 x 与 y 一个为奇数，另一个为偶数时，$(x+y)/2$ 不在 $\mathbf{Z}$ 中，所以 $\forall x\forall y\exists z(z=(x+y)/2)$为假命题.

3.10 本题中没指定个体域，因而使用全总个体域，并且要引入特性谓词.

(1) $\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))\Leftrightarrow\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

其中,$F(x)$: x 为人,$G(x)$: x 吃饭.

(2) $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

其中,$F(x)$: x 在北京卖菜,$G(x)$: x 是东北人.

(3) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

其中,$F(x)$: x 为自然数,$G(x)$: x 是整数.

(4) $\exists x(F(x)\wedge G(x))$

其中,$F(x)$: x 为人,$G(x)$: x 天天锻炼身体.

3.11 本题中没指定个体域,因而使用全总个体域.设 $F(x)$: x 是火车,$G(y)$: y 是汽车,$L(x,y)$: x 比 y 快,$H(x,y)$: x 比 y 慢.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$

(2) $\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge L(x,y)))$

(3) $\neg\exists y(G(y)\wedge\forall x(F(x)\rightarrow L(y,x)))$

(4) $\neg\forall y(G(y)\rightarrow\forall x(F(x)\rightarrow H(y,x)))$

分析 以上4个命题的符号化还有不同形式.利用主教材3.2节的等值式和置换规则可进行如下的演算.

(1) $\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\rightarrow(G(y)\rightarrow L(x,y)))$ (量词辖域收缩与扩张等值式)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg F(x)\vee\neg G(y)\vee L(x,y))$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee L(x,y))$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$ (蕴涵等值式)

通过以上演算可知:

$$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$$

因而,(1)中命题常符号化为

$$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$$

(2) $\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge L(x,y)))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$ (量词辖域收缩与扩张等值式)

(3) $\neg\exists y(G(y)\wedge\forall x(F(x)\rightarrow L(y,x)))$

$\Leftrightarrow\forall y\neg(G(y)\wedge\forall x(F(x)\rightarrow L(y,x)))$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\forall y(\neg G(y)\vee\neg\forall x(F(x)\rightarrow L(y,x)))$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow\forall y(\neg G(y)\vee\exists x\neg(F(x)\rightarrow L(y,x)))$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\forall y(\neg G(y)\vee\exists x\neg(\neg F(x)\vee L(y,x)))$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow\forall y(\neg G(y)\vee\exists x(F(x)\wedge\neg L(y,x)))$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow\forall y(G(y)\rightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg L(y,x)))$ (蕴涵等值式)

由以上演算可知,(3)中命题符号化为

$$\neg\exists y(G(y)\wedge\forall x(F(x)\rightarrow L(y,x)))$$

或

$$\forall y(G(y)\rightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg L(y,x)))$$

都可以.请将后一种形式翻译成自然语言.

(4) $\neg \forall y(G(y) \to \forall x(F(x) \to H(y,x)))$

$\Leftrightarrow \exists y \neg (G(y) \to \forall x(F(x) \to H(y,x)))$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow \exists y \neg (\neg G(y) \vee \forall x(\neg F(x) \vee H(y,x)))$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow \exists y(G(y) \wedge \neg \forall x(\neg F(x) \vee H(y,x)))$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow \exists y(G(y) \wedge \exists x \neg (\neg F(x) \vee H(y,x)))$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow \exists y(G(y) \wedge \exists x(F(x) \wedge \neg H(y,x)))$ (德摩根律)

由以上演算可知,(4)中命题可符号化为

$$\neg \forall y(G(y) \to \forall x(F(x) \to H(y,x)))$$

或

$$\exists y(G(y) \wedge \exists x(F(x) \wedge \neg H(y,x)))$$

请将后一种形式翻译成自然语言.

3.12 (1) $\forall x \exists y(x \cdot y=0)$,真值为 1.

(2) $\exists x \forall y(x \cdot y=0)$,真值为 1.

(3) $\forall x \exists y(y=x+1)$,真值为 1.

(4) $\forall x \forall y(x \cdot y=y \cdot x)$,真值为 1.

分析 因为本题中给定的 x 与 y 的关系比较简单,因而没有引入 2 元谓词符号.若引入 2 元谓词符号也可以.如设 $F(x,y)$: $x \cdot y=0$, $G(x,y)$: $y=x+1$, $H(x,y)$: $x \cdot y=y \cdot x$.则有

(1) $\forall x \exists y F(x,y)$.

(2) $\exists x \forall y F(x,y)$.

(3) $\forall x \exists y G(x,y)$.

(4) $\forall x \forall y H(x,y)$.

3.13 (1)“对于任意的整数 x 和 y,都存在着整数 z,使得 $x-y=z$”是真命题.

(2)“对于任意的整数 x,都存在着整数 y,使得 $x \cdot y=1$”是假命题.

(3)“存在着整数 x,对于任意的整数 y 和 z,都有 $x+y=z$”是假命题.

分析 ① 用反例说明(2)是假命题.取 $x=5$,在 $\mathbf{Z}$ 中不存在 y,使得 $x \cdot y=1$.

② 对于命题(3),不可能存在固定的 x_0,使得对于任意的 y 和 z,都有 $x_0+y=z$,x 应随着 y、z 的变化而变化.例如,$y=7$,$z=10$ 时,x 应为 3;当 $y=2$,$z=9$ 时,x 应为 7,所以(3)为假命题.若将(3)变为 $\forall y \forall z \exists x(x+y=z)$,则得到一个真命题.此例说明,量词的顺序不能随便颠倒.

3.14 (1) 在公式 $\forall x(F(x) \to G(x,y))$ 中,$\forall x$ 中的 x 为指导变元.量词 $\forall$ 的辖域 $A=(F(x) \to G(x,y))$,在 A 中 x 都是约束出现的,而 y 是自由出现的.

(2) 在公式 $\forall x F(x,y) \to \exists y G(x,y)$ 中,$\forall x$ 中的 x 和 $\exists y$ 中的 y 都是指导变元. $\forall$ 的辖域为 $F(x,y)$,其中 x 是约束出现的,而 y 是自由出现的. $\exists$ 的辖域为 $G(x,y)$,其中,x 是自由出现的,y 是约束出现的.

(3) 在公式 $\forall x \exists y(F(x,y) \wedge G(y,z)) \vee \exists x H(x,y,z)$ 中,$\forall x$ 中的 x,$\exists y$ 中的 y,$\exists x$ 中的 x 都是指导变元. $\exists y$ 中 $\exists$ 的辖域为 $(F(x,y) \wedge G(y,z))$,$\forall x$ 中 $\forall$ 的辖域为 $\exists y(F(x,y) \wedge G(y,z))$,其中 x、y 是约束出现的,而 z 是自由出现的. $\exists x$ 中 $\exists$ 的辖域为 $H(x,y,z)$,x 是约束出现的,y、z 是自由出现的.在整个公式中,x 约束出现两次,y 约束出

现两次,自由出现一次,z 自由出现两次.

3.15 (1)"对于任意的实数 x 和 y,若 $x<y$,则 $x\neq y$"是真命题.

(2)"对于任意的实数 x 和 y,若 $x-y=0$,则 $x<y$"是假命题.

(3)"对于任意的实数 x 和 y,若 $x<y$,则 $x-y\neq 0$"是真命题.

(4)"对于任意的实数 x 和 y,若 $x-y<0$,则 $x=y$"是假命题.

3.16 (1)"对于任意的自然数 x,均有 $x\times 2=1$"是假命题.

(2)"对于任意的自然数 x,如果 $x+2=1$,则对于任意的自然数 y,$y+2=x$"是真命题.

(3)"对于任意的自然数 x 和 y,都存在着自然数 z,使得 $x+y=z$"是真命题.

(4)"存在自然数 x,使得 $x+1=2x$"是真命题.

3.17 (1)、(4)为永真式(逻辑有效式),(2)、(6)为永假式(矛盾式),(3)、(5)、(7)、(8)为非永真式的可满足式.

分析 在一阶逻辑中,判断给定公式的类型不是一件易事.由定义3.8可知,A 为永真式当且仅当 A 无成假解释和赋值,A 为矛盾式当且仅当 A 无成真解释和赋值.A 为非永真式的可满足式当且仅当 A 存在成真的解释和赋值并且存在成假的解释和赋值.由于公式的复杂性,解释的多样性,判断一阶逻辑公式的类型是不可判定的.

由于本题给出的8个公式的特殊性,还是可以判断其类型的.下面逐个进行分析.

(1) 设(1)中公式为 A.

方法1 等值演算法:

$$
\begin{aligned}
A &= F(x,y)\rightarrow(G(x,y)\rightarrow F(x,y)) \\
&\Leftrightarrow \neg F(x,y)\vee(\neg G(x,y)\vee F(x,y)) && \text{(蕴涵等值式)} \\
&\Leftrightarrow (\neg F(x,y)\vee F(x,y))\vee\neg G(x,y) && \text{(交换律、结合律)} \\
&\Leftrightarrow 1\vee\neg G(x,y) && \text{(排中律)} \\
&\Leftrightarrow 1 && \text{(零律)}
\end{aligned}
$$

方法2 重言式的代换实例:

注意到 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 为命题逻辑中的重言式,而公式 A 为它的代换实例,由定理3.2可知,A 为永真式.

(2) 设(2)中公式为 B.

$$
\begin{aligned}
B &= \forall x(F(x)\rightarrow F(x))\rightarrow\exists y(G(y)\wedge\neg G(y)) \\
&\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x)\vee F(x))\rightarrow\exists y(G(y)\wedge\neg G(y))
\end{aligned}
$$

由以上等值式可知,对于任意的解释 I,B 的前件均为真,而 B 的后件均为假,于是 B 为矛盾式.

(3) 设(3)中公式为 C.

下面论证 C 既有成真的解释,又有成假的解释.

设解释 I_1 为:个体域为整数集 $\mathbf{Z}$,$F(x,y)$:$x<y$.在 I_1 下,C 的前件 $\forall x\exists yF(x,y)$ 为真,但 C 的后件 $\exists y\forall xF(x,y)$ 为假,所以 I_1 为 C 的成假解释.

设解释 I_2 为:个体域仍为 $\mathbf{Z}$,$F(x,y)$:$x+y=x$,在 I_2 下,C 的前件与后件均为真,故 I_2 为 C 的成真解释.

综上所述,C 不是永真式,也不是矛盾式,它是非永真式的可满足式.

(4) 设(4)中公式为 D.

论证 D 无成假的解释.

设 I 为任意的解释.

① 若在 I 下,D 的前件 $\exists x \forall y F(x,y)$ 为假,则在 I 下 D 为真.

② 若在 I 下,D 的前件 $\exists x \forall y F(x,y)$ 为真,必存在 $x_0 \in D_I$(I 的定义域),使得 $\forall y F(x_0,y)$ 为真. 又由于对于任意 $y \in D_I$,$F(x_0,y)$ 为真,有 $\exists x F(x,y)$ 为真,从而 $\forall y \exists x F(x,y)$ 为真.

由 I 的任意性可知,D 是永真式.

(5) 设(5)中公式为 E.

设解释 I_1 为:个体域为整数集合 $\mathbf{Z}$,$F(x,y)$:$x=y$,在 I_1 下,E 为真.

设解释 I_2 为:个体域仍为 $\mathbf{Z}$,$F(x,y)$:$x<y$,在 I_2 下,若 $F(x,y)$ 为真,则 $F(y,x)$ 为假,所以在 I_2 下 E 为假.

综上所述,E 是非永真式的可满足式.

(6) 设(6)中公式为 F,可通过等值演算证明 F 为矛盾式.

$$
\begin{aligned}
F &= \neg(\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y)) \wedge \exists y G(y) \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg \forall x F(x) \vee \exists y G(y)) \wedge \exists y G(y) && \text{(蕴涵等值式)} \\
&\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \neg \exists y G(y) \wedge \exists y G(y) && \text{(德摩根律)} \\
&\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge (\neg \exists y G(y) \wedge \exists y G(y)) && \text{(结合律)} \\
&\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge 0 && \text{(矛盾律)} \\
&\Leftrightarrow 0 && \text{(零律)}
\end{aligned}
$$

实际上,F 是矛盾式 $\neg(p \rightarrow q) \wedge q$ 的代换实例.

(7) 设(7)中公式为 G.

取解释 I_1:个体域 N,$F(x,y)$:$x=y$;赋值 $\sigma(y)=0$. 在 I_1 和 σ 下,G 为"存在自然数 x,$x=0$."这是真命题.

取解释 I_2,把 I_1 中 $x=y$ 改为 $x<y$. 在 I_2 和 σ 下,G 为"存在自然数 x,$x<0$."这是假命题.

故 G 是非永真式的可满足式.

(8) 设(8)中公式为 H.

取解释 I_1:个体域 N,$F(x,y)$:$x \leqslant y$;赋值 σ:$\sigma(x)=\sigma(y)=0$. 在 I_1 和 σ 下,H 为"存在自然数 $x \leqslant 0$ 蕴涵所有的自然数 $y \geqslant 0$."这是真命题.

取解释 I_2,把 I_1 中 $x \leqslant y$ 改为 $x=y$. 在 I_2 和 σ 下,G 为"存在自然数 $x=0$ 蕴涵所有的自然数 $y=0$."这是假命题.

故 H 是非永真式的可满足式.

说明 (2)、(3)、(4)、(5)都是闭式,只需考虑解释,而用不着赋值.

3.18 (1) $\forall x F(x,y) \rightarrow \forall x F(x,y)$,$G(x,y,z) \vee \neg G(x,y,z)$等都是非闭式,它们都是永真式.

(2) $F(x) \wedge \neg F(x)$,$\forall x F(x,y) \wedge \exists x \neg F(x,y)$等都是非闭式,它们都是矛盾式.

(3) $F(x,y) \rightarrow G(x,y)$是非闭式,它是可满足式,但不是永真式.

分析 注意(2)中后一个公式:

$$\forall xF(x,y)\land\exists x\neg F(x,y)$$
$$\Leftrightarrow\forall xF(x,y)\land\neg\forall xF(x,y)$$

3.19　一个公式 A 不是永真式当且仅当 A 存在着成假的解释和赋值,A 不是矛盾式当且仅当 A 存在着成真的解释和赋值.这两个公式都闭式,只需要考虑解释.

(1) 设(1)中公式为 A.

① 设解释 I_1 为:个体域为非0自然数集 $\mathbf{N}^+$,$F(x)$:x 为偶数,$G(y)$:y 为奇数,$H(x,y)$:$x|y$(x 整除 y).在解释 I_1 下,A 为假命题,所以 A 不是永真式.

② 设解释 I_2 为:个体域为实数集 $\mathbf{R}$,$F(x)$:x 为有理数,$G(y)$:y 为分数,$H(x,y)$:$x=y$.在 I_2 下 A 为真命题,所以 A 不是矛盾式.

综上所述,A 为可满足式,但不是永真式.

(2) 设(2)中公式为 B.

① 设解释 I_1 为:全总个体域,$F(x)$:x 为马,$G(y)$:y 为骡,$H(x,y)$:x 与 y 跑得同样快.在 I_1 下,B 为假命题,所以 B 不是永真式.

② 设解释 I_2 为:全总个体域,$F(x)$:x 为飞机,$G(y)$:y 为轮船,$H(x,y)$:x 比 y 快,在 I_2 下 B 为真命题,所以 B 不是矛盾式.

综上所述,B 是可满足式,但不是永真式.

3.20　解本题时应该应用量词否定等值式.

(1)　$\neg\exists x\exists yL(x,y)$

$\Leftrightarrow\forall x\neg\exists yL(x,y)$　　(量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\neg L(x,y)$　　(量词否定等值式)

(2)　$\neg\forall x\forall yL(x,y)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg\forall yL(x,y)$　　(量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\exists x\exists y\neg L(x,y)$　　(量词否定等值式)

(3)　$\neg\exists x(F(x)\land\forall y\neg L(x,y))$

$\Leftrightarrow\forall x\neg(F(x)\land\forall y\neg L(x,y))$　　(量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\forall x(\neg F(x)\lor\neg\forall y\neg L(x,y))$　　(德摩根律)

$\Leftrightarrow\forall x(\neg F(x)\lor\exists yL(x,y))$　　(量词否定等值式)

最后一步也用上了双重否定律.

(4)　$\neg\forall x(\exists yL(x,y)\lor\forall yH(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\neg(\exists yL(x,y)\lor\forall yH(x,y))$　　(量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\exists x(\neg\exists yL(x,y)\land\neg\forall yH(x,y))$　　(德摩根律)

$\Leftrightarrow\exists x(\forall y\neg L(x,y)\land\exists y\neg H(x,y))$　　(量词否定等值式)

3.21　解本题时,使用换名规则.

(1)　$\forall xF(x,y)\land\exists yG(x,y,z)$

$\Leftrightarrow\forall uF(u,y)\land\exists vG(x,v,z)$　　(换名规则)

(2)　$\exists x(F(x,y)\land\forall yG(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x(F(x,y)\land\forall uG(x,u))$　　(换名规则)

3.22　证明本题,只需要找到解释 I,用具体的谓词代替 $A(x)$ 和 $B(x)$,使其对应的两个命题不等值即可.

(1) 取解释 I_1：个体域为全总个体域，取 $A(x)$：x 为人，$B(x)$：x 呼吸. 此时，"$\forall x(A(x)\to B(x))$"翻译成自然语言为"人都呼吸"，这是真命题. 而"$\forall x(A(x)\land B(x))$"翻译成自然语言应为"宇宙中的一切事物都是人并且呼吸"，这显然是假命题. 这说明公式 $(\forall x(A(x)\to B(x))\leftrightarrow(\forall x(Ax)\land B(x)))$ 存在着成假的解释，因而

$$\forall x(A(x)\to B(x))\not\Leftrightarrow\forall x(A(x)\land B(x))$$

(2) 取解释 I_2：个体域为自然数集合 $\mathbf{N}$，$A(x)$：x 为奇数，$B(x)$：x 为偶数，此时，"$\exists x(A(x)\land B(x))$"翻译成自然语言为"存在自然数 x 既是奇数，又是偶数"，这是假命题. 而"$\exists x(A(x)\to B(x))$"翻译成自然语言为"存在自然数 x，如果 x 是奇数，则 x 是偶数"，这是真命题(例如 $A(0)\to B(0)$，$A(2)\to B(2)$ 等均为真)，这说明 $\exists x(A(x)\land B(x))\leftrightarrow\exists x(A(x)\to B(x))$ 存在成假解释，因而

$$\exists x(A(x)\land B(x))\not\Leftrightarrow\exists x(A(x)\to B(x))$$

分析 (1) 本题说明"$\forall x(A(x)\to B(x))$"与"$\forall x(A(x)\land B(x))$"不等值. 命题"人都吃饭"、"偶数都能被 2 整除"、"兔子跑得快"等都是全称量词加蕴涵语句，都应符号化为"$\forall x(A(x)\to B(x))$"的形式，而不能符号化为"$\forall x(A(x)\land B(x))$"的形式.

(2) 本题说明"$\exists x(A(x)\land B(x))$"与"$\exists x(A(x)\to B(x))$"不等值. 命题"有的人吸烟"、"存在偶素数"、"有百岁老人"等都应符号化为"$\exists x(A(x)\land B(x))$"的形式，而不应该符号化为"$\exists x(A(x)\to B(x))$"的形式.

3.23 解本题需要注意的是，若量词的辖域能收缩就收缩，使演算的步骤尽量少.

(1) $\forall x\exists y(F(x)\land G(y))$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\land\exists yG(y)$ (量词辖域收缩与扩张等值式)

消去量词，得

$(F(a)\land F(b))\land(G(a)\lor G(b))$

(2) $\forall x\exists y(F(x)\land G(x,y))$

$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\land\exists yG(x,y))$ (量词辖域收缩与扩张等值式)

先消去 $\forall x$，得

$(F(a)\land\exists yG(a,y))\land(F(b)\land\exists yG(b,y))$

再消去 $\exists y$，得

$(F(a)\land(G(a,a)\lor G(a,b)))\land(F(b)\land(G(b,a)\lor G(b,b)))$

$\Leftrightarrow F(a)\land F(b)\land(G(a,a)\lor G(a,b))\land(G(b,a)\lor G(b,b))$

(3) $\exists xF(x)\land\forall xG(x)$ 可写成

$(F(a)\lor F(b))\land(G(a)\land G(b))$

(4) $\exists x(F(x,y)\land\forall yG(y))$

$\Leftrightarrow\exists xF(x,y)\land\forall yG(y)$ (量词辖域收缩与扩张等值式)

可写成

$(F(a,y)\lor F(b,y))\land(G(a)\land G(b))$

分析 (1) 若不将量词辖域收缩，则演算过程要长些，特别是，若个体域中元素较多时，过程会更长.

$\forall x\exists y(F(x)\land G(y))$ 先消去 $\forall x$，写成

$\exists y(F(a)\land G(y))\land\exists y(F(b)\land G(y))$

再消去 $\exists y$,得

$$((F(a)\land G(a))\lor(F(a)\land G(b)))\land((F(b)\land G(a))\lor(F(b)\land G(b)))$$
$$\Leftrightarrow(F(a)\land(G(a)\lor G(b)))\land(F(b)\land(G(a)\lor G(b)))$$
$$\Leftrightarrow(F(a)\land F(b))\land(G(a)\lor G(b))$$

这里没有使用量词辖域收缩与扩张等值式,显然演算过程就长多了,所以,若能应用量词辖域收缩与扩张等值式就应该先用它,然后再消量词.但如果量词辖域不能缩小,那就只好直接演算了.

(2) 演算到 $\forall x(F(x)\land\exists yG(x,y))$后,$\forall$ 的辖域不能再缩小了.演算也可以如下进行:

$$\forall x\exists y(F(x)\land G(x,y))$$
$$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\land\exists yG(x,y))$$

先消去 $\exists y$,得

$$\forall x(F(x)\land(G(x,a)\lor G(x,b)))$$

再消去 $\forall x$,得

$$(F(a)\land(G(a,a)\lor G(a,b)))\land(F(b)\land(G(b,a)\lor G(b,b)))$$
$$\Leftrightarrow F(a)\land F(b)\land(G(a,a)\lor G(a,b))\land(G(b,a)\lor G(b,b))$$

(3) $\exists xF(x)\land\forall xG(x)$的辖域已经不能再缩小了,所以对它消量词最简单,但有人先将它化成前束范式后再消量词,那是自找麻烦.

(4) 注意 $F(x,y)$中的 y 在公式中是自由出现的,消量词之后,它依然自由出现.

3.24 (1) 本题量词辖域已不能再缩小,因而直接消量词.

$\forall xF(x)\to\forall yG(y)$可写成

$$(F(a)\land F(b)\land F(c))\to(G(a)\land G(b)\land G(c))$$

(2) 注意 $F(x,y)$中的 y 在公式中是自由出现的,$\exists yG(y)$中不含 x,因而 $\forall$ 的辖域可以缩小.

$$\forall x(F(x,y)\to\exists yG(y))$$
$$\Leftrightarrow\exists xF(x,y)\to\exists yG(y)\qquad(\text{量词辖域收缩与扩张等值式})$$

可写成

$$(F(a,y)\lor F(b,y)\lor F(c,y))\to(G(a)\lor G(b)\lor G(c))$$

3.25 解此题,先消去量词比较方便.

(1) $\forall x(F(x)\to G(x))$可写成

$$(F(1)\to G(1))\land(F(2)\to G(2))$$

(2) $\exists x(F(x)\land G(x))$可写成

$$(F(1)\land G(1))\lor(F(2)\land G(2))$$

取 I_1:个体域 $D=\{1,2\}$,$F(x)$:$x\geqslant 1$,$G(x)$:$x\leqslant 2$,在 I_1 下,$F(1)$、$F(2)$、$G(1)$、$G(2)$均为真,所以,(1)与(2)中公式在 I_1 下全真.

取 I_2:个体域 $D=\{1,2\}$,$F(1)=1$,$F(2)=0$,$G(1)=0$,$G(2)=1$,在 I_2 下,(1)与(2)中公式全为假.

3.26 (1) 在 I_1 下,公式 $A=\exists xF(x)\to\forall xF(x)$可写成 $F(a)\to F(a)\Leftrightarrow\neg F(a)\lor F(a)\Leftrightarrow 1$,所以,在 I_1 下公式 A 为真.

(2) 在 I_2 下,A 不一定为真.

在 D_2 中消去量词，得

$$(F(a_1) \vee F(a_2) \vee \cdots \vee F(a_n)) \to (F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \cdots \wedge F(a_n))$$

当 $F(a_1), F(a_2), \cdots, F(a_n)$ 中至少有 1 个为真，但不全为真时，蕴涵式的前件为真，后件为假，所以蕴涵式为假. 当 $F(a_1), F(a_2), \cdots, F(a_n)$ 全为真时，A 为真.

3.27　在本题中，由于个体域 D 中只含 2 个元素，因而可以消去量词，进行演算.

(1)　$\forall x \exists y \bar{F}(x,y)$ 先消去 $\forall x$，写成

$\exists y \bar{F}(3,y) \wedge \exists y \bar{F}(4,y)$

再消去 $\exists y$，得

$$(\bar{F}(3,3) \vee \bar{F}(3,4)) \wedge (\bar{F}(4,3) \vee \bar{F}(4,4))$$
$$\Leftrightarrow (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) \Leftrightarrow 1$$

(2)　$\exists x \forall y \bar{F}(x,y)$ 先消去 $\exists x$，写成

$\forall y \bar{F}(3,y) \vee \forall y \bar{F}(4,y)$

再消去 $\forall y$，得

$$(\bar{F}(3,3) \wedge \bar{F}(3,4)) \vee (\bar{F}(4,3) \wedge \bar{F}(4,4))$$
$$\Leftrightarrow (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \Leftrightarrow 0$$

(3)　$\forall x \forall y(\bar{F}(x,y) \to \bar{F}(\bar{f}(x), \bar{f}(y)))$ 先消去 $\forall x$，写成

$\forall y(\bar{F}(3,y) \to \bar{F}(\bar{f}(3), \bar{f}(y))) \wedge \forall y(\bar{F}(4,y) \to \bar{F}(\bar{f}(4), \bar{f}(y)))$

再消去 $\forall y$，得

$$(\bar{F}(3,3) \to \bar{F}(\bar{f}(3), \bar{f}(3))) \wedge (\bar{F}(3,4) \to \bar{F}(\bar{f}(3), \bar{f}(4))) \wedge (\bar{F}(4,3) \to \bar{F}(\bar{f}(4), \bar{f}(3))) \wedge (\bar{F}(4,4) \to \bar{F}(\bar{f}(4), \bar{f}(4)))$$
$$\Leftrightarrow (\bar{F}(3,3) \to \bar{F}(4,4)) \wedge (\bar{F}(3,4) \to \bar{F}(4,3)) \wedge (\bar{F}(4,3) \to \bar{F}(3,4)) \wedge (\bar{F}(4,4) \to \bar{F}(3,3))$$
$$\Leftrightarrow (0 \to 0) \wedge (1 \to 1) \wedge (1 \to 1) \wedge (0 \to 0)$$
$$\Leftrightarrow 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \Leftrightarrow 1$$

3.28　本题中没有指定个体域，因而使用全总个体域.

(1) 设 $F(x)$：x 为正数，$G(y)$：y 为负数，$H(x,y)$：$x<y$.

① $\neg \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge H(x,y))$.

② $\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to \neg H(x,y))$.

(2) 设 $F(x)$：x 为角，$H(x,y)$：$x=y$，$L(x,y)$：x 与 y 为对顶角.

① $\neg \forall x \forall y(F(x) \wedge F(y) \wedge H(x,y) \to L(x,y))$.

② $\exists x \exists y(F(x) \wedge F(y) \wedge H(x,y) \wedge \neg L(x,y))$.

分析　证明两种不同形式的符号化形式是等值的.

(1)　$\neg \exists x \exists y(F(x) \wedge G(y) \wedge H(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \neg(F(x) \wedge G(y) \wedge H(x,y))$　　（量词否定等值式）

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \neg((F(x) \wedge G(y)) \wedge H(x,y))$　　（结合律）

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(\neg(F(x) \wedge G(y)) \vee \neg H(x,y))$　　（德摩根律）

$\Leftrightarrow \forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \to \neg H(x,y))$　　（蕴涵等值式）

由以上的证明可知，①⇔②.

其实,由②开始演算也可以.

$$\forall x\forall y(F(x)\land G(y)\to\neg H(x,y))$$

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(\neg(F(x)\land G(y))\lor\neg H(x,y))$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\neg(F(x)\land G(y)\land H(x,y))$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow\forall x\neg\exists y(F(x)\land G(y)\land H(x,y))$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\neg\exists x\exists y(F(x)\land G(y)\land H(x,y))$ (量词否定等值式)

(2) $\neg\forall x\forall y(F(x)\land F(y)\land H(x,y)\to L(x,y))$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y\neg(F(x)\land F(y)\land H(x,y)\to L(x,y))$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\exists x\exists y\neg(\neg(F(x)\land F(y)\land H(x,y))\lor L(x,y))$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(F(x)\land F(y)\land H(x,y)\land\neg L(x,y))$ (德摩根律)

由以上演算可知①⇔②.

从②开始演算也可以.

$$\exists x\exists y(F(x)\land F(y)\land H(x,y)\land\neg L(x,y))$$

$\Leftrightarrow\exists x\exists y(\neg\neg(F(x)\land F(y)\land H(x,y))\land\neg L(x,y))$ (双重否定律)

$\Leftrightarrow\exists x\exists y\neg(\neg(F(x)\land F(y)\land H(x,y))\lor L(x,y))$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow\exists x\exists y\neg(F(x)\land F(y)\land H(x,y)\to L(x,y))$ (蕴涵等值式)

$\Leftrightarrow\neg\forall x\forall y(F(x)\land F(y)\land H(x,y)\to L(x,y))$ (量词否定等值式)

3.29 (1) $\exists xF(x)\to\forall yG(x,y)$

$\Leftrightarrow\exists uF(u)\to\forall yG(x,y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow\forall u(F(u)\to\forall yG(x,y))$ (量词辖域收缩与扩张等值式)

$\Leftrightarrow\forall u\forall y(F(u)\to G(x,y))$ (量词辖域收缩与扩张等值式)

(2) $\forall x(F(x,y)\to\forall yG(x,y,z))$

$\Leftrightarrow\forall x(F(x,y)\to\forall uG(x,u,z))$ (换名规则)

$\Leftrightarrow\forall x\forall u(F(x,y)\to G(x,u,z))$ (量词辖域收缩与扩张等值式)

3.30 (1) $F(x)\land G(x)\to L(x,y)$已为前束范式.

(2) $\forall x_1(F(x_1)\to G(x_1,x_2))\to(\exists x_2H(x_2)\to\exists x_3L(x_2,x_3))$

$\Leftrightarrow\forall x_4(F(x_4)\to G(x_4,x_2))\to(\exists x_5H(x_5)\to\exists x_3L(x_2,x_3))$

$\Leftrightarrow\forall x_4(F(x_4)\to G(x_4,x_2))\to\forall x_5(H(x_5)\to\exists x_3L(x_2,x_3))$

$\Leftrightarrow\forall x_4(F(x_4)\to G(x_4,x_2))\to\forall x_5\exists x_3(H(x_5)\to L(x_2,x_3))$

$\Leftrightarrow\exists x_4((F(x_4)\to G(x_4,x_2))\to\forall x_5\exists x_3(H(x_5)\to L(x_2,x_3)))$

$\Leftrightarrow\exists x_4\forall x_5((F(x_4)\to G(x_4,x_2))\to\exists x_3(H(x_5)\to L(x_2,x_3)))$

$\Leftrightarrow\exists x_4\forall x_5\exists x_3((F(x_4)\to G(x_4,x_2))\to(H(x_5)\to L(x_2,x_3)))$

在以上演算中,第一步使用换名规则,将指导变元 x_1 及其2个约束出现替换成 x_4,将指导变元 x_2 及紧随其后的一个约束出现替换成 x_5;在第二步和第三步将蕴涵式的后件用量词辖域收缩与扩张等值式化成前束范式;第四步~第六步将整个公式化成了前束范式.在演算中注意正确地使用量词辖域收缩与扩张等值式.

(3) $\exists x_1F(x_1,x_2)\to(H(x_1)\to\neg\exists x_2G(x_1,x_2))$

$\Leftrightarrow\exists x_3F(x_3,x_2)\to(H(x_1)\to\neg\exists x_4G(x_1,x_4))$ (换名规则)

$\Leftrightarrow\exists x_3F(x_3,x_2)\to(H(x_1)\to\forall x_4\neg G(x_1,x_4))$ (量词否定等值式)

$\Leftrightarrow\exists x_3F(x_3,x_2)\to\forall x_4(H(x_1)\to\neg G(x_1,x_4))$

$$\Leftrightarrow \forall x_3(F(x_3,x_2)\to \forall x_4(H(x_1)\to \neg G(x_1,x_4)))$$
$$\Leftrightarrow \forall x_3\forall x_4(F(x_3,x_2)\to(H(x_1)\to \neg G(x_1,x_4)))$$

3.31　本题没指定个体域，因而使用全总个体域.

(1) 设 $F(x)$：x 为汽车，$G(y)$：y 是火车，$H(x,y)$：x 比 y 跑得快，则

$$\exists x(F(x)\wedge \exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge H(x,y))$$

最后一步用量词辖域收缩与扩张等值式及结合律，所得公式为前束范式.

(2) 设 $F(x)$：x 是火车，$G(y)$：y 是汽车，$H(x,y)$：x 比 y 跑得快，则

$$\exists x(F(x)\wedge \forall y(G(y)\to H(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow \exists x\forall y(F(x)\wedge(G(y)\to H(x,y)))$$

最后一步所得公式为前束范式.

(3) 设 $F(x)$：x 是火车，$G(y)$：y 是汽车，$H(x,y)$：x 比 y 跑得快，则

$$\neg(\forall x(F(x)\to \forall y(G(y)\to H(x,y))))$$
$$\Leftrightarrow \neg(\forall x\forall y(F(x)\to(G(y)\to H(x,y))))$$
$$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(\neg F(x)\vee(\neg G(y)\vee H(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge \neg H(x,y))$$

最后一步得公式所前束范式.

(4) 设 $F(x)$：x 为飞机，$G(y)$：y 为汽车，$H(x,y)$：x 比 y 慢，则

$$\neg\exists x(F(x)\wedge \exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow \neg\exists x\exists y(F(x)\wedge(G(y)\wedge H(x,y)))$$
$$\Leftrightarrow \forall x\forall y\neg(F(x)\wedge G(y)\wedge H(x,y))$$
$$\Leftrightarrow \forall x\forall y(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee \neg H(x,y))$$
$$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to \neg H(x,y))$$

最后一步所得公式为前束范式.

3.32　(1) 可用两种方法求(1)中公式的前束范式.

方法 1　利用存在量词 $\exists$ 对 $\vee$ 适合分配律.

$$\exists xF(x)\vee \exists xG(x)\vee L(x,y)$$
$$\Leftrightarrow \exists x(F(x)\vee G(x))\vee L(x,y)$$
$$\Leftrightarrow \exists z(F(z)\vee G(z))\vee L(x,y)\quad \text{(换名规则)}$$
$$\Leftrightarrow \exists z(F(z)\vee G(z)\vee L(x,y))\quad \text{(量词辖域收缩与扩张等值式)}$$

方法 2　不用 $\exists$ 对 $\vee$ 的分配律.

$$\exists xF(x)\vee \exists xG(x)\vee L(x,y)$$
$$\Leftrightarrow \exists zF(z)\vee \exists uG(u)\vee L(x,y)\quad \text{(换名规则)}$$
$$\Leftrightarrow \exists z\exists u(F(z)\vee G(u)\vee L(x,y))\quad \text{(量词辖域收缩与扩张等值式)}$$

(2)

$$\neg(\forall xF(x)\vee \forall xG(x))$$
$$\Leftrightarrow \neg(\forall xF(x)\vee \forall yG(y))\quad \text{(换名规则)}$$
$$\Leftrightarrow \neg\forall x\forall y(F(x)\vee G(y))\quad \text{(量词辖域收缩与扩张等值式)}$$
$$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(F(x)\vee G(y))\quad \text{(量词否定等值式)}$$
$$\Leftrightarrow \exists x\exists y(\neg F(x)\wedge \neg G(y))\quad \text{(德摩根律)}$$

最后两步所得公式都是前束范式. 注意，$\forall$ 对 $\vee$ 无分配律.

第 4 章 关 系

4.1 内容提要

1. 有序对与笛卡儿积

由两个元素，比如说 x 和 y，按照一定次序构成的二元组称为一个**有序对**，记作 $\langle x,y\rangle$. 其中 x 是它的**第一元素**，y 是它的**第二元素**.

设 A、B 为集合，以 A 中元素作为第一元素，B 中元素作为第二元素做有序对，所有这样的有序对构成的集合称为 A 与 B 的**笛卡儿积**，记作 $A\times B$. 符号化表示为

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$$

由 n 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 按照一定的顺序排列构成**有序 n 元组**，记作 $\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为集合，称

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle \mid x_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}$$

为 **n 阶笛卡儿积**.

笛卡儿积的运算性质

(1) 当 A 或者 B 为空集时，$A\times B$ 也是空集.

(2) 笛卡儿积运算不适合交换律，即 $A\times B\neq B\times A$，除非 $A=B$，$A=\varnothing$或者 $B=\varnothing$.

(3) 笛卡儿积运算不适合结合律，即$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$，除非 $A=\varnothing$，$B=\varnothing$ 或者 $C=\varnothing$.

(4) 笛卡儿积运算对并和交运算适合分配律，即

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$
$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$
$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

2. 二元关系

如果一个集合中的元素都是有序对或者这个集合是空集，则称这个集合是一个**二元关系**，简称**关系**. 关系的名字一般使用大写的英文字母，通常记作 R. 如果有序对 $\langle x,y\rangle\in R$，可以简单记作 xRy，否则记为 $x\not R y$.

$A\times B$ 的任何子集所定义的二元关系叫做**从 A 到 B 的二元关系**，当 $A=B$ 时则叫做 **A 上的二元关系**.

A 上的特殊关系：

空关系　$\varnothing$.

全域关系　$E_A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A \land y\in A\}=A\times A$.

恒等关系　$I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$.

小于等于关系　$L_A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \land x\leqslant y\}$,这里 $A\subseteq \mathbf{R}$,$\mathbf{R}$ 为实数集合.

整除关系　$D_A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \land x$ 整除 $y\}$,这里 $A\subseteq \mathbf{Z}^*$,$\mathbf{Z}^*$ 为非 0 整数集合.

包含关系　$R_\subseteq=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \land x\subseteq y\}$,这里 A 是集合族.

3. 关系的表示

关系有三种表示法:集合表达式、关系矩阵和关系图.关系矩阵只能表示从有穷集 A 到有穷集 B 的关系,关系图只能表示有穷集 A 上的关系.

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$B=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$,R 是从 A 到 B 的关系,R 的**关系矩阵**是布尔矩阵 $\mathbf{M}_R=(r_{ij})_{n\times m}$,其中 $r_{ij}=1\Leftrightarrow \langle x_i,y_j\rangle\in R$,$i=1,2,\cdots,n$,$j=1,2,\cdots,m$.

当 R 为 A 上的关系时,R 的关系矩阵是 n 阶方阵.

设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,R 的**关系图**是 $G_R=\langle A,R\rangle$,其中 A 为 G_R 的结点集,R 为边集.$\forall x_i,x_j\in A$,如果 $\langle x_i,x_j\rangle\in R$,在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

4. 关系的基本运算

定义域　$\mathrm{dom}R=\{x\mid \exists y(\langle x,y\rangle\in R)\}$.

值域　$\mathrm{ran}R=\{y\mid \exists x(\langle x,y\rangle\in R)\}$.

域　$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup \mathrm{ran}R$.

逆　$R^{-1}=\{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle\in R\}$.

合成　$R\circ S=|\langle x,z\rangle \mid \exists y(\langle x,y\rangle\in R\land \langle y,z\rangle\in S)$.

有关基本运算的定理:

定理 4.1　设 F 是任意的关系,则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$,$\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

定理 4.2　设 F,G,H 是任意的关系,则

(1) $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$.

(2) $(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$.

定理 4.3　设 R 为 A 上的关系,则

$$R\circ I_A=I_A\circ R=R$$

5. 关系的幂运算

设 R 为 A 上的关系,n 为自然数,则 R 的 ***n* 次幂**定义为

(1) $R^0=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}=I_A$.

(2) $R^{n+1}=R^n\circ R$.

有关幂运算的定理:

定理 4.4　设 A 为 n 元集,R 是 A 上的关系,则存在自然数 s 和 $t(s<t)$,使得 $R^s=R^t$.

定理 4.5　设 R 是 A 上的关系,$m,n\in\mathbf{N}$,则

(1) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$.

(2) $(R^m)^n=R^{mn}$.

定理 4.6　设 R 是 A 上的关系,若存在自然数 s、$t(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$,则

(1) 对任何 $k\in\mathbf{N}$,有 $R^{s+k}=R^{t+k}$.

(2) 对任何 $k,i\in\mathbf{N}$,有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$,其中 $p=t-s$.

(3) 令 $S=\{R^0,R^1,\cdots,R^{t-1}\}$,则对于任意的 $q\in\mathbf{N}$,有 $R^q\in S$.

6. A 上关系的性质

设 R 是集合 A 上的关系,则

(1) 如果 $\forall x(x\in A\rightarrow\langle x,x\rangle\in R)$,则称 R 在 A 上**自反**.

(2) 如果 $\forall x(x\in A\rightarrow\langle x,x\rangle\notin R)$,则称 R 在 A 上**反自反**.

(3) 如果 $\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\rightarrow\langle y,x\rangle\in R)$,则称 R 在 A 上**对称**.

(4) 如果 $\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$,则称 R 在 A 上**反对称**.

(5) 如果 $\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\rightarrow\langle x,z\rangle\in R)$,则称 R 在 A 上**传递**.

判别法:

利用关系表达式判别:

(1) R 在 A 上自反 $\Leftrightarrow I_A\subseteq R$.

(2) R 在 A 上反自反 $\Leftrightarrow R\cap I_A=\varnothing$.

(3) R 在 A 上对称 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$.

(4) R 在 A 上反对称 $\Leftrightarrow R\cap R^{-1}\subseteq I_A$.

(5) R 在 A 上传递 $\Leftrightarrow R\circ R\subseteq R$.

利用关系矩阵判别:

(1) R 在 A 上自反 $\Leftrightarrow$ 主对角线元素全是 1.

(2) R 在 A 上反自反 $\Leftrightarrow$ 主对角线元素全是 0.

(3) R 在 A 上对称 $\Leftrightarrow$ 矩阵是对称矩阵.

(4) R 在 A 上反对称 $\Leftrightarrow$ 若 $r_{ij}=1$,且 $i\neq j$,则 $r_{ji}=0$.

(5) R 在 A 上传递 $\Leftrightarrow$ 对 $\boldsymbol{M}^2$ 中 1 所在位置,$\boldsymbol{M}$ 中相应位置都是 1.

利用关系图判别:

(1) R 在 A 上自反 $\Leftrightarrow$ 每个顶点都有环.

(2) R 在 A 上反自反 $\Leftrightarrow$ 每个顶点都没有环.

(3) R 在 A 上对称 $\Leftrightarrow$ 如果两个顶点之间有边,一定是一对方向相反的边(无单向边).

(4) R 在 A 上反对称 $\Leftrightarrow$ 如果两点之间有边,一定是一条有向边(无双向边).

(5) R 在 A 上传递 $\Leftrightarrow$ 如果顶点 x_i 到 x_j 有边,x_j 到 x_k 有边,则从 x_i 到 x_k 也有边.

7. 关系的闭包

设 R 是非空集合 A 上的关系,R 的**自反(对称或传递)闭包**是 A 上的关系 R',使得 R' 满足以下条件:

(1) R' 是自反的(对称的或传递的).

(2) $R\subseteq R'$.

(3) 对 A 上任何包含 R 的自反(对称或传递)关系 R'' 有 $R'\subseteq R''$.

一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$,对称闭包记作 $s(R)$,传递闭包记作 $t(R)$.

关系闭包的计算公式:

定理 4.7 设 R 为 A 上的关系,则有

(1) $r(R)=R\cup R^0$.

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$.

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$.

计算传递闭包的沃舍尔(Warshall)算法(时间复杂度为 $O(n^3)$).

8. 等价关系

集合 A 上的自反的、对称的、传递的关系 R 称为 A 上的**等价关系**. 对于任何元素 $x,y\in A$,如果 xRy,则称 x 与 y 等价,记作 $x\sim y$.

设 R 为集合 A 上的等价关系,x 为 A 上的元素,A 中与 x 等价的全体元素构成的子集称为 x 的**等价类**,记作 $[x]_R$.

等价类的性质:

定理 4.8　设 R 是非空集合 A 上的等价关系,则

(1) $\forall x\in A$,$[x]$是 A 的非空子集.

(2) $\forall x,y\in A$,如果 xRy,则$[x]=[y]$.

(3) $\forall x,y\in A$,如果 $x\not R y$,则$[x]$与$[y]$不交.

(4) $\bigcup_{x\in A}[x]=A$.

商集与划分:

A 上的全体等价类构成的集合称作 A 关于等价关系 R 的**商集**,记作 A/R. 即

$$A/R=\{[x]_R \mid x\in A\}$$

设 A 为非空集合,若 A 的子集族 $\pi(\pi\subseteq P(A))$满足下面条件:

(1) $\varnothing\notin\pi$.

(2) $\forall x\forall y(x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$.

(3) $\bigcup_{x\in\pi}x=A$.

则称 π 是 A 的一个**划分**,称 π 中的元素为 A 的**划分块**.

集合 A 的划分与 A 上的等价关系是一一对应的.

9. 偏序关系

序关系的定义:

非空集合 A 上的自反、反对称和传递的关系称为 A 上的**偏序关系**,简称**偏序**,记作$\preccurlyeq$.

非空集合 A 上的反自反和传递的关系称为 A 上的**拟序关系**,简称为**拟序**,记作$\prec$.

设 R 为非空集合 A 上的偏序关系,$\forall x,y\in A$,x 与 y 都是可比的,则称 R 为**全序关系**,简称**全序**(**或线序**).

集合 A 和 A 上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做**偏序集**,记作$\langle A,\preccurlyeq\rangle$.

A 上偏序关系 $R_{\preccurlyeq}$ 与拟序关系 $R_{\prec}$ 之间存在如下的一一对应:

$$R_{\preccurlyeq}=R_{\prec}\cup I_A,\quad R_{\prec}=R_{\preccurlyeq}-I_A$$

偏序集中的元素的可比与覆盖:

设 R 为非空集合 A 上的偏序,$x,y\in A$,如果 $x\preccurlyeq y\vee y\preccurlyeq x$,则称 x 与 y **可比**.

设 R 为非空集合 A 上的偏序,$x,y\in A$,如果 $x\prec y$ 且不存在 $z\in A$ 使得 $x\prec z\prec y$,则称 y 覆盖 x.

偏序集中的特殊元素:

设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$为偏序集,$B\subseteq A$,$y\in B$.

(1) 若 $\forall x(x\in B\to y\leqslant x)$成立,则称 y 为 B 的**最小元**.

(2) 若 $\forall x(x\in B\to x\leqslant y)$成立,则称 y 为 B 的**最大元**.

(3) 若 $\forall x(x\in B\wedge x\leqslant y\to x=y)$成立,则称 y 为 B 的**极小元**.

(4) 若 $\forall x(x\in B\wedge y\leqslant x\to x=y)$成立,则称 y 为 B 的**极大元**.

设 $\langle A,\leqslant\rangle$ 为偏序集,$B\subseteq A$,$y\in A$.

(5) 若 $\forall x(x\in B\to x\leqslant y)$成立,则称 y 为 B 的**上界**.

(6) 若 $\forall x(x\in B\to y\leqslant x)$成立,则称 y 为 B 的**下界**.

(7) 令 $C=\{y\mid y$ 为 B 的上界$\}$,则称 C 的最小元为 B 的**最小上界或上确界**.

(8) 令 $D=\{y\mid y$ 为 B 的下界$\}$,则称 D 的最大元为 B 的**最大下界或下确界**.

偏序集的特殊子集:

设 $\langle A,\leqslant\rangle$ 为偏序集,$B\subseteq A$.

(1) 如果 $\forall x,y\in B$,x 与 y 都是可比的,则称 B 是 A 中的一条**链**,B 中的元素个数称为**链的长度**.

(2) 如果 $\forall x,y\in B$,$x\neq y$,x 与 y 都是不可比的,则称 B 是 A 中的一条**反链**,B 中的元素个数称为**反链的长度**.

偏序集反链分解算法与拓扑排序算法.

4.2 习　　题

4.1 设 $A=\{1,2\}$,计算 $P(A)\times A$.

4.2 $A=\{0,1\}$,$B=\{1,2\}$,确定 $A\times\{1\}\times B$.

4.3 (1) 证明 $A\subseteq B\wedge C\subseteq D\Rightarrow A\times C\subseteq B\times D$.

(2) 命题 (1) 的逆命题是否正确,证明你的结论.

4.4 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{4,5,6,8\}$,列出关系 $R\subseteq A\times B$ 中的有序对.

(1) xRy 当且仅当 x 整除 y.

(2) xRy 当且仅当 $\gcd(x,y)=1$,即 x 与 y 的最大公约数等于 1.

(3) xRy 当且仅当 x 或 y 为素数.

(4) xRy 当且仅当 $x\geqslant y$.

(5) xRy 当且仅当 $x+y<8$.

4.5 设 $A=\{1,2,3\}$,A 上的关系 $R=\{\langle x,y\rangle\mid x=y+1$ 或 $x=y-1\}$,R 的补关系 $\bar{R}$ 也是 A 上的关系,其中,$\bar{R}=\{\langle x,y\rangle\mid\langle x,y\rangle\notin R\}$. 求 $\bar{R}$.

4.6 列出关系 $R=\{\langle a,b,c,d\rangle\mid a,b,c,d\in\mathbf{Z}^+,abcd=6\}$中所有的有序 4 元组.

4.7 设 R 是自然数集 $\mathbf{N}$ 上的关系且满足 xRy 当且仅当 $x+2y=10$,其中,+为普通加法,计算以下各题.

(1) $\operatorname{dom} R$.

(2) $\operatorname{ran} R$.

(3) R^{-1}.

4.8 设 $R=\{\langle a,\{a,\{a\}\}\rangle,\langle\{a\},a\rangle,\langle a,a\rangle\}$,求:

(1) $R\circ R$.

(2) $\mathrm{dom}R$.

4.9　设 R、S 都是二元关系,证明:$\mathrm{dom}(R\cup S)=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{dom}S$.

4.10　设 $R=\{\langle\varnothing,\{\varnothing\}\rangle,\langle\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\rangle\}$,计算以下各小题.

(1) R^{-1}.

(2) $R\circ R$.

4.11　设 $R=\{\langle\varnothing,\{\varnothing\}\rangle,\langle\{\varnothing\},a\rangle,\langle b,\varnothing\rangle\}$,求:

(1) $\mathrm{ran}R$.

(2) $R\circ R$.

4.12　$A=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4\}$,$R_1$,$R_2$ 为 A 上的关系,其中,

$$R_1=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A,y-1<x<y+2\}$$

$$R_2=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A,x^2\leqslant y\}$$

令 $R_i(x)=\{y\mid xR_iy\}$,$i=1,2$,求 $R_1(0)$与 $R_2(3)$.

4.13　判断下列各关系是否具有自反性、反自反性、对称性、反对称性、传递性.

(1) R 是自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的关系,且 xRy 当且仅当 $x+y$ 是偶数.

(2) R 是自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的关系,且 xRy 当且仅当 $x>y$ 或 $y>x$.

(3) R 是自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的关系,且 xRy 当且仅当 $|x|+|y|\neq3$.

(4) R 是有理数集合 $\mathbf{Q}$ 上的关系,且 xRy 当且仅当 $y=x+2$.

(5) R 是自然数集合 $\mathbf{N}$ 上的关系,且 xRy 当且仅当 $xy=4$.

4.14　设集合 $A=\{a,b,c\}$,R 是 A 上的二元关系,已知 R 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

(1) 写出 R 的集合表达式.

(2) 画出 R 的关系图.

(3) 说明 R 具有哪些性质.

4.15　$A=\{0,1,\cdots,7\}$,$\forall x,y\in A$,$xRy\Leftrightarrow4<x-y$,说明 R 具有什么性质.

4.16　设 $X=\{1,2,3\}$,R 是 X 上的关系,且 $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$,那么 R 的性质是什么?

4.17　设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$,R 是 A 上的二元关系,其关系定义如下:

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle\}$$

使用关系矩阵法求最小的自然数 s、t 使得 $s<t$,且 $R^s=R^t$.

4.18　$X=\{a,b,c,d\}$,X 上的关系 R 如图 4.1 所示.求 $r(R)$、$s(R)$、$t(R)$的关系图.

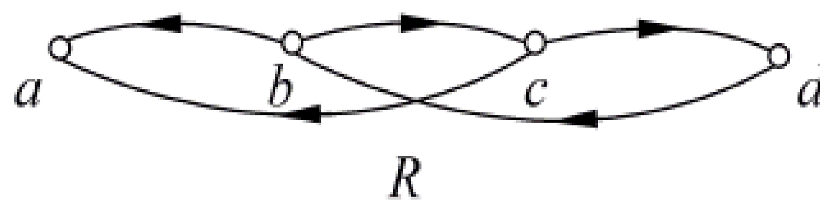


图　4.1

4.19　对于表 4.1(主教材中的表 4.3)中每个打×的命题给出反例.

表 4.1

关系性质 / 关系运算	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

4.20 已知 $R \subseteq A \times A$ 且 $A=\{a,b,c\}$，R 的关系矩阵为

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

求传递闭包 $t(R)$ 的关系矩阵 $\boldsymbol{M}_t$.

4.21 设 R 是 A 上自反的关系，

(1) 证明 $R \circ R^{-1}$ 是 A 上的自反关系.

(2) 证明 $R \circ R^{-1}$ 是 A 上的对称关系.

(3) $R \circ R^{-1}$ 是否为 A 上的传递关系？如果是，给出证明；如果不是，给出反例.

4.22 指出下面命题证明中的错误.

命题：设 R 是集合 A 上的对称、传递的关系，则 R 是自反的.

证明：设 $x \in A$，根据对称性由 $\langle x,y\rangle \in R$ 得到 $\langle y,x\rangle \in R$，再使用传递性得到 $\langle x,x\rangle \in R$. 从而证明了 R 的自反性.

4.23 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y \in A \wedge x-y$ 可被 2 整除$\}$，简答以下各题.

(1) 画出 R 的关系图.

(2) R 是否为 A 上的等价关系？如果是，求出 R 的各等价类.

4.24 设集合 $X=\{1,2,3\}$，下列关系 A、B、C、D 中哪些不是 X 上的等价关系？为什么？

$A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

$B=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$

$C=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

$D=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

4.25 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$R=I_A \cup \{\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$ 为 A 上的等价关系，求出所有的等价类.

4.26 R 为自然数集 $\mathbf{N}$ 上的关系，$\forall x,y \in \mathbf{N}$，$xRy \Leftrightarrow 2 \mid (x+y)$，试确定 R 引起的 $\mathbf{N}$ 的划分.

4.27 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，A 上的划分 $\pi=\{\{1,2\},\{3,4\},\{5\}\}$，给出由 π 所诱导出的 A 上的等价关系 R 的集合表达式.

4.28 设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$，R 是 A 上的二元关系，且 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle e,f\rangle\}$. 设 $R^*=tsr(R)$，则 R^* 是 A 上的等价关系.

(1) 写出 R^* 的关系表达式.

(2) 写出商集 A/R^*.

4.29　设 $A=\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$，在 A 上定义二元关系 R 如下：$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R$ 当且仅当 $xv=yu$，证明 R 是一个等价关系.

4.30　如果集合 A 上的关系 R 是自反的和对称的，则称 R 是 A 上的**相容关系**. 若 $\langle x,y\rangle$ 属于相容关系 R，则称 x 与 y **相容**. 设 B 是 A 的子集，如果 B 中任何两个元素都是彼此相容的，则称 B 为 A 关于 R 的**相容性分块**. 如果某个相容性分块 B 满足下述性质：$\forall x\in A-B$，x 不能与 B 的所有元素都相容，那么就称 B 是**极大相容性分块**. 令 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,4\rangle\}\cup I_A$，则 R 为 A 上的相容关系，求出 A 关于 R 的所有的极大相容性分块.

4.31　$A=\{a,b,c,d\}$，$\pi_i(i=1,2,3,4)$ 是 A 的划分，设

$$\pi_1=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$$
$$\pi_2=\{\{a,c\},\{b,d\}\}$$
$$\pi_3=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$$
$$\pi_4=\{\{a,b,c,d\}\}$$

设 $\Pi=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4\}$，$\leqslant$ 为划分的加细关系，即 $\pi_i\leqslant\pi_j$ 当且仅当 π_i 的每个划分块都包含在 π_j 的某个划分块中，求偏序集 $\langle\Pi,\leqslant\rangle$ 的哈斯图.

4.32　设 $A=\{1,2,3,4,6,8,9\}$，偏序集 $S=\langle A,\leqslant\rangle$，其中，$\leqslant$ 为整除关系.

(1) 画出 S 的哈斯图.

(2) 找出 $\{4,6\}$ 的最大下界和最小上界.

4.33　$A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$，$\langle A,\leqslant\rangle$ 是偏序集，其中 $\leqslant$ 为整除关系. 画出 $\langle A,\leqslant\rangle$ 的哈斯图.

4.34　图 4.2 是偏序集 $\langle X,\leqslant\rangle$ 的哈斯图.

(1) 求 X 和 $\leqslant$ 的集合表达式.

(2) 求该偏序集的极大元、极小元、最大元、最小元.

4.35　设 $A=\{1,2,3,4\}$，图 4.3 给出了 A 上的两个偏序关系，试画出它们的哈斯图，并指出每个偏序集的极大元、最大元、极小元、最小元.

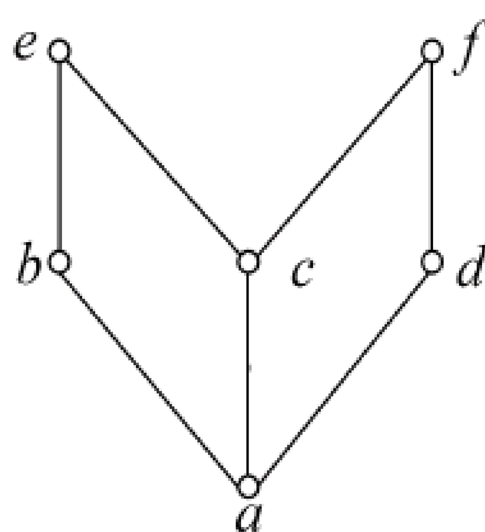


图　4.2

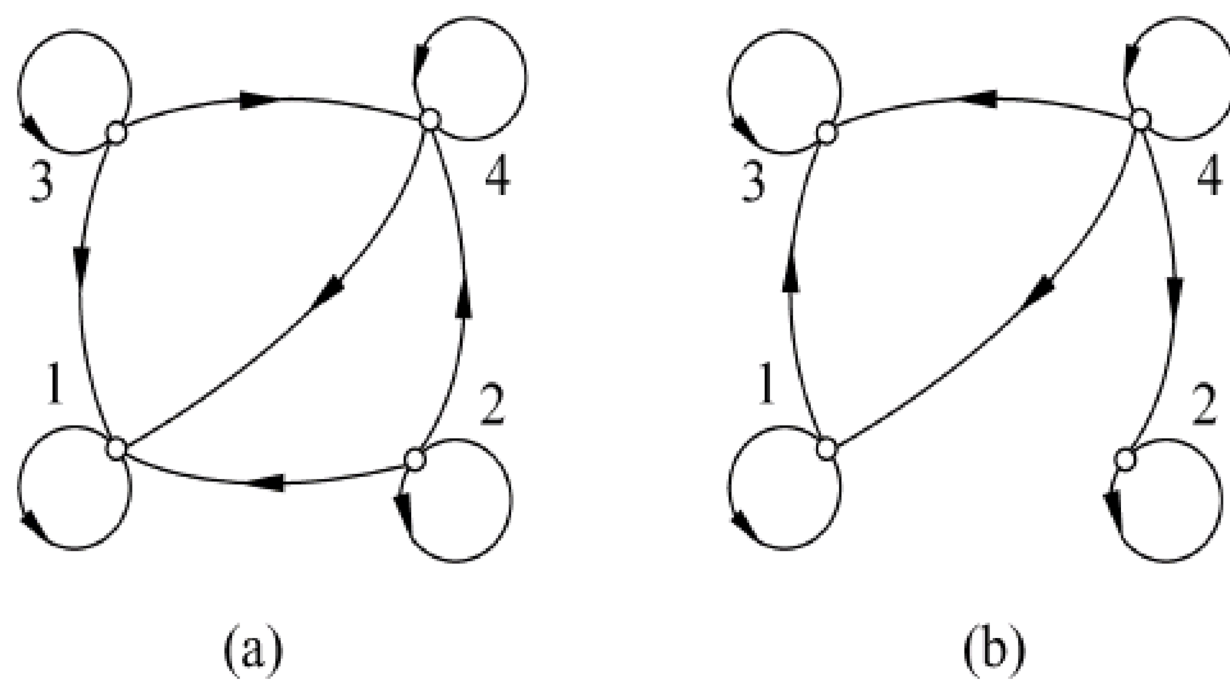


图　4.3

4.36　设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，R 为 A 上的整除关系，$A_1=\{2,3,6\}$，$A_2=\{2,3,5\}$，求 A_1 与 A_2 的上界、下界、上确界、下确界.

4.37　$A=\{2,3,\cdots,9\}$，$\leqslant$ 为 A 上的偏序，$\forall x,y\in A$，$x\leqslant y\Leftrightarrow(\alpha(x)<\alpha(y))\vee(\alpha(x)=\alpha(y)\wedge x\leqslant y)$. $\alpha(x)$ 表示 x 的互异的质因子个数，画出 $\langle A,\leqslant\rangle$ 的哈斯图.

4.38　在 $A=\{1,2,3\}$ 上可定义多少个偏序关系？其中有多少个是全序关系？

4.39　(1) 设 R 为 A 上的偏序关系，证明 $R-I_A$ 为 A 上的拟序关系.

(2) 设 S 为 A 上的拟序关系,证明 $S\cup I_A$ 为 A 上的偏序关系.

4.40 设 $\langle S,\preccurlyeq\rangle$ 是偏序集,且它的最大反链的长度是 n,证明如果将它分解成链,则链的条数至少是 n.

4.3 习题解答与分析

4.1 $P(A)\times A=\{\langle\varnothing,1\rangle,\langle\varnothing,2\rangle,\langle\{1\},1\rangle,\langle\{1\},2\rangle,\langle\{2\},1\rangle,\langle\{2\},2\rangle,\langle\{1,2\},1\rangle,\langle\{1,2\},2\rangle\}$.

4.2 $A\times\{1\}\times B=\{\langle 0,1,1\rangle,\langle 0,1,2\rangle,\langle 1,1,1\rangle,\langle 1,1,2\rangle\}$.

4.3 (1) 任取 $\langle x,y\rangle$,则

$$\langle x,y\rangle\in A\times C\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C\Rightarrow x\in B\wedge y\in D\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in B\times D$$

(2) 不正确.反例:$A=\varnothing,B=D=\{1\},C=\{2\}$.

4.4 (1) $R=\{\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,6\rangle\}$.

(2) $R=\{\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 3,8\rangle\}$.

(3) $R=\{\langle 2,4\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,8\rangle,\langle 1,5\rangle\}$.

(4) $R=\varnothing$.

(5) $R=\{\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,4\rangle\}$.

4.5 $R=\{\langle 3,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$.

$\bar{R}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

4.6 $R=\{\langle 1,1,1,6\rangle,\langle 1,1,6,1\rangle,\langle 1,6,1,1\rangle,\langle 6,1,1,1\rangle,\langle 1,1,2,3\rangle,\langle 1,1,3,2\rangle,\langle 1,2,3,1\rangle,\langle 1,3,2,1\rangle,\langle 1,2,1,3\rangle,\langle 1,3,1,2\rangle,\langle 2,1,1,3\rangle,\langle 3,1,1,2\rangle,\langle 3,1,2,1\rangle,\langle 2,1,3,1\rangle,\langle 2,3,1,1\rangle,\langle 3,2,1,1\rangle\}$.

4.7 $R=\{\langle 0,5\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 8,1\rangle,\langle 10,0\rangle\}$,则

(1) $\mathrm{dom}R=\{0,2,4,6,8,10\}$.

(2) $\mathrm{ran}\,R=\{0,1,2,3,4,5\}$.

(3) $R^{-1}=\{\langle 5,0\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 1,8\rangle,\langle 0,10\rangle\}$.

4.8 (1) $R\circ R=\{\langle\{a\},a\rangle,\langle\{a\},\{a,\{a\}\}\rangle,\langle a,a\rangle,\langle a,\{a,\{a\}\}\rangle\}$.

(2) $\mathrm{dom}R=\{a,\{a\}\}$.

4.9 任取 x,则

$$\begin{aligned}x\in\mathrm{dom}(R\cup S)&\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in R\cup S)\\&\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in R\vee\langle x,y\rangle\in S)\\&\Leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in R)\vee\exists y(\langle x,y\rangle\in S)\\&\Leftrightarrow x\in\mathrm{dom}R\vee x\in\mathrm{dom}S\\&\Leftrightarrow x\in\mathrm{dom}R\cup\mathrm{dom}S\end{aligned}$$

4.10 (1) $R^{-1}=\{\langle\{\varnothing\},\varnothing\rangle,\langle\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\rangle\}$.

(2) $R\circ R=\{\langle\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\rangle\}$.

4.11 (1) $\mathrm{ran}R=\{a,\varnothing,\{\varnothing\}\}$.

(2) $R\circ R=\{\langle\varnothing,a\rangle,\langle b,\{\varnothing\}\rangle\}$.

4.12 由于 $y\in R_1(0)\Leftrightarrow x-2<y<x+1,x=0,y\in A\Leftrightarrow -2<y<1,y\in A$,于是

$R_1(0)=\{-1,0\}$.

由于 $y\in R_2(3)\Leftrightarrow 3^2\leqslant y, y\in A$，没有 y 满足这个条件，因此 $R_2(3)=\varnothing$.

4.13　(1) R 仅具有自反性、对称性和传递性.

(2) R 仅具有反自反性和对称性.

(3) R 仅具有自反性和对称性.

(4) R 仅具有反自反性和反对称性.

(5) R 仅具有对称性.

说明：(1) $x+x$ 是偶数，于是 R 是自反的；$x+y$ 为偶数，那么 $y+x$ 也是偶数，于是 R 是对称的；$\langle 2,4\rangle$ 与 $\langle 4,2\rangle$ 同时属于 R，因此不是反对称的；$x+y$ 是偶数，$y+z$ 是偶数，那么 $x+z$ 也是偶数，于是 R 是传递的.

(2) $x<x$ 不成立，于是 R 不是自反的，而是反自反的；若 $x>y$ 或 $y>x$，必有 $y>x$ 或 $x>y$，对称性成立；反对称性不成立，因为 $\langle 1,2\rangle$，$\langle 2,1\rangle$ 都属于 R，但是 $1\neq 2$；R 不是传递的，因为 $\langle 1,2\rangle$ 和 $\langle 2,1\rangle$ 都属于 R，但是 $\langle 1,1\rangle$ 不属于 R.

(3) 是自反的，因为 $|x|+|x|=2x$ 不等于 3；是对称的，不是反对称的，因为 $\langle 1,3\rangle$，$\langle 3,1\rangle$ 属于 R，但是 $1\neq 3$；不传递，因为 $1+0\neq 3, 0+2\neq 3$，但是 $1+2=3$.

(4) $x\neq x+2$，于是 R 是反自反的；若 $x=y+2$，一定不会有 $y=x+2$，因此 R 不是对称的，而是反对称的；$y=x+2, z=y+2$，那么 $z=x+4$，所以 R 不是传递的.

(5) 不是自反的，因为 $\langle 1,1\rangle$ 不属于 R；不是反自反的，因为 $\langle 2,2\rangle$ 属于 R；是对称的，但不是反对称的，$\langle 1,4\rangle$ 与 $\langle 4,1\rangle$ 都属于 R，但是 $1\neq 4$；不传递，因为 $\langle 1,4\rangle$，$\langle 4,1\rangle$ 都属于 R，但是 $\langle 1,1\rangle$ 不属于 R.

4.14　(1) $R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$.

(2) 关系图如图 4.4 所示.

(3) 由关系图不难看出 R 是自反、对称、传递的.

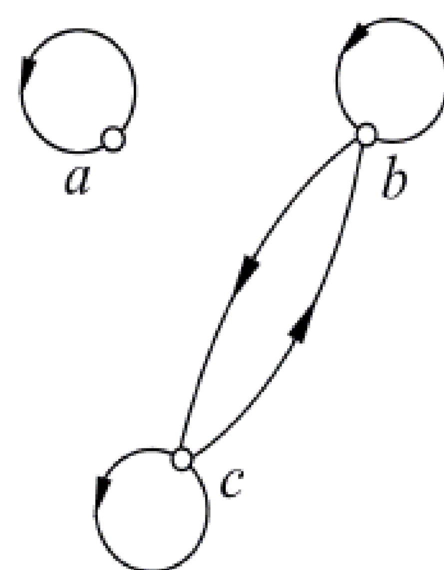


图　4.4

4.15　R 是反自反的、反对称的、传递的.

说明：对任何 x，$4<x-x$ 都不成立，R 是反自反的；若 $4<x-y$，那么 $y-x<-4$，不会成立 $4<y-x$，关系是反对称的；若 $4<x-y$，$4<y-z$，那么 $4<8<x-z$，R 是传递的.

4.16　R 是反对称、传递的.

4.17　设 R 的关系矩阵是 $\boldsymbol{M}$，则：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^4=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}^5=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{M}^6=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{M}^6$ 对应的关系是

$$R^6=I_A=R^0$$

因此得到 $s=0,t=6$.

4.18 R 的自反、对称、传递闭包如图4.5所示.

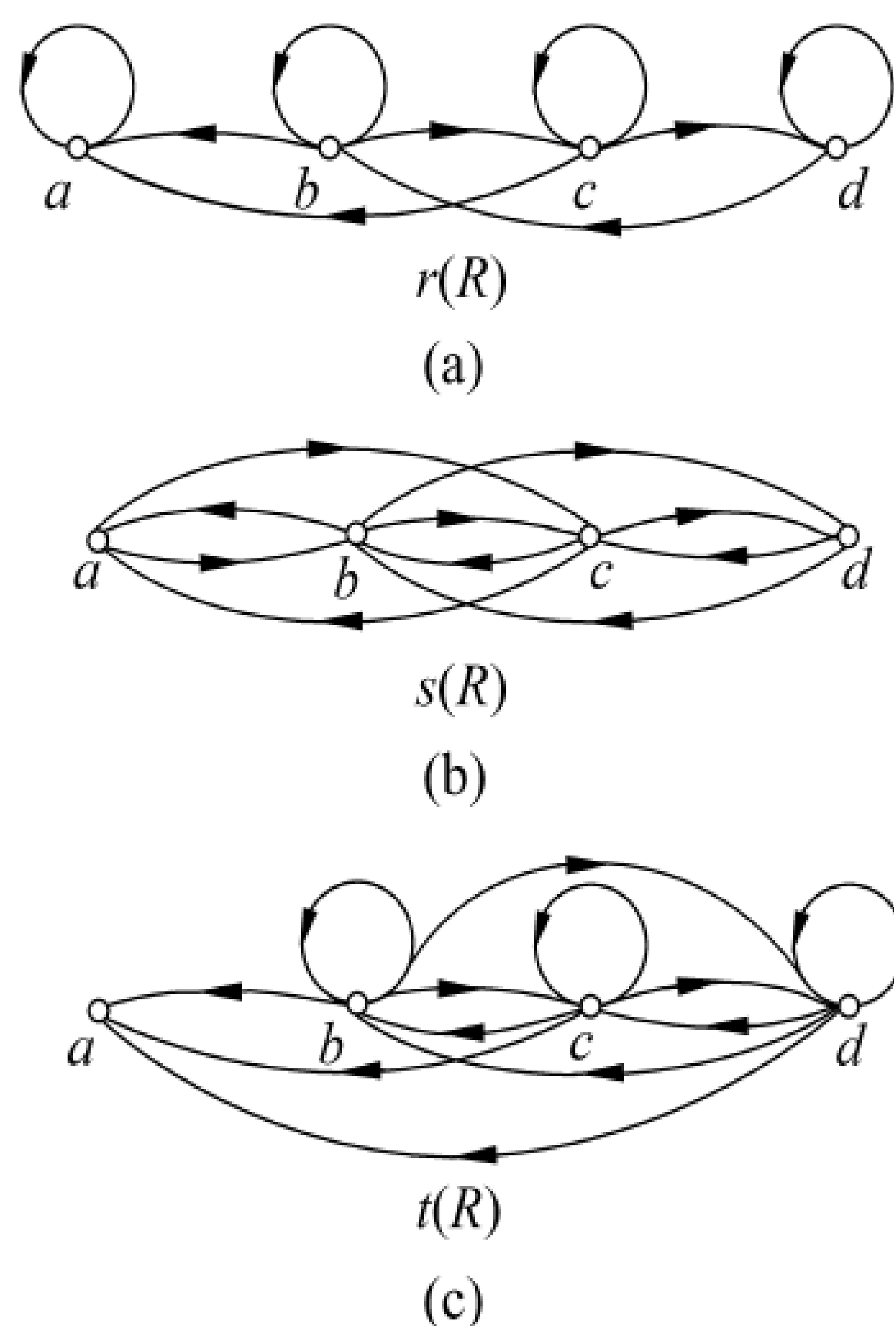


图 4.5

4.19 $\cup$运算不保持反对称性与传递性,反例1:$A=\{1,2\},R_1=\{\langle 1,2\rangle\},R_2=\{\langle 2,1\rangle\}$.

$-$运算不保持自反性与传递性,反例2:$A=\{1,2\}$,$R_1=E_A,R_2=I_A$.

- $\circ$运算不保持反自反性,同反例1.
- $\circ$运算不保持对称性,反例3:$A=\{1,2\},R_1=\{\langle 1,1\rangle\},R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$.
- $\circ$运算不保持反对称性,反例4:$A=\{1,2\},R_1=\{\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle\},R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$.
- $\circ$运算不保持传递性,反例5:

$$A=\{1,2,3,4\}$$
$$R_1=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$$
$$R_2=\{\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$$

4.20 根据矩阵可以知道 R 是传递的,于是$\boldsymbol{M}_t=\boldsymbol{M}_R$.

4.21 (1) 任取 $x\in A$,则

$$\begin{aligned}\langle x,x\rangle\in R&\Rightarrow\langle x,x\rangle\in R\land\langle x,x\rangle\in R\\&\Rightarrow\langle x,x\rangle\in R\land\langle x,x\rangle\in R^{-1}\\&\Rightarrow\langle x,x\rangle\in R\circ R^{-1}\end{aligned}$$

(2) 任取 $x,y\in A$,则

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in R\circ R^{-1}&\Rightarrow\exists z(\langle x,z\rangle\in R\land\langle z,y\rangle\in R^{-1})\\&\Rightarrow\exists z(\langle y,z\rangle\in R\land\langle z,x\rangle\in R^{-1})\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R\circ R^{-1}\end{aligned}$$

(3) 不一定,反例:$A=\{1,2,3\},R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,则

$$R\circ R^{-1}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

上述关系中含有$\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle$,但是没有$\langle 1,3\rangle$,因此不是传递的.

4.22 在$\langle x,y\rangle\in R$成立的条件下可以推出$\langle x,x\rangle\in R$,但是这个条件不一定对 A 上所有的 x 都成立,因此,不能证明对所有的 $x\in A$ 都有$\langle x,x\rangle\in R$.

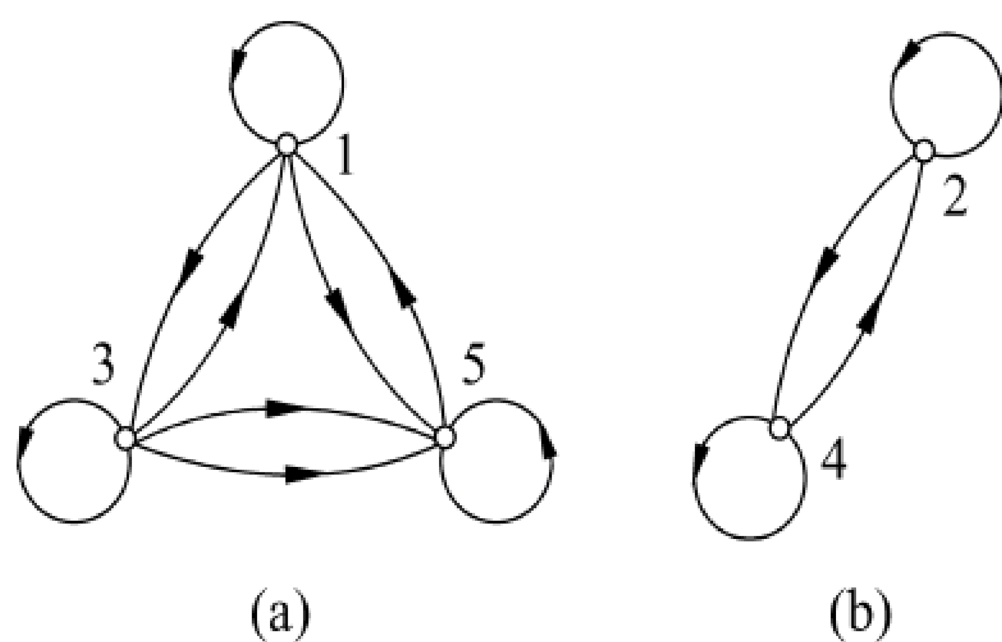


图 4.6

4.23 (1) 关系图如图4.6所示.

(2) 是等价关系.等价类是 $[1]=[3]=[5]=\{1,3,5\},[2]=[4]=\{2,4\}$.

4.24 A 是恒等关系,因此是等价关系;B 是自反、对称、传递的关系,也是等价关系;C 不是等价关系,因为 C 没有对称性;D 是等价关系,因为 D 是全域关系.

4.25 根据 R 的定义知道 a 与 c 等价,b 与 d 等价,于是$[a]=[c]=\{a,c\},[b]=[d]=\{b,d\}$.

4.26 $xRy\Leftrightarrow 2\mid(x+y)\Leftrightarrow x$ 与 y 具有相同的奇偶性.令 $A=\{2x\mid x\in\mathbf{N}\}$,则划分$=$

$\{A,\mathbf{N}-A\}$.

4.27　$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}\cup I_A$.

4.28　(1) $R^*=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle\}\cup I_A$.

(2) $A/R^*=\{\{a,b,c\},\{d\},\{e,f\}\}$.

4.29　任取$\langle x,y\rangle$,则

$$\langle x,y\rangle\in\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+\Rightarrow xy=yx\Rightarrow\langle\langle x,y\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\in R$$

任取$\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\in\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$,则

$$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R\Rightarrow xv=yu\Rightarrow uy=vx\Rightarrow\langle\langle u,v\rangle,\langle x,y\rangle\rangle\in R$$

任取$\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle,\langle w,t\rangle\in\mathbf{Z}^+\times\mathbf{Z}^+$,则

$$\langle\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\rangle\in R\wedge\langle\langle u,v\rangle,\langle w,t\rangle\rangle\in R$$

$$\Rightarrow xv=yu\wedge ut=vw\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{u}{v}\wedge\frac{u}{v}=\frac{w}{t}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{w}{t}\Leftrightarrow xt=yw\Rightarrow\langle\langle x,y\rangle,\langle w,t\rangle\rangle\in R$$

4.30　极大相容性分块是$\{1,2\},\{2,3\},\{3,4,5\}$.

4.31　最细的划分是π_1,最粗的划分是π_4.哈斯图如图4.7所示.

4.32　(1) 哈斯图如图4.8所示.

(2) $\{4,6\}$的最大下界2,最小上界不存在.

4.33　哈斯图如图4.9所示.

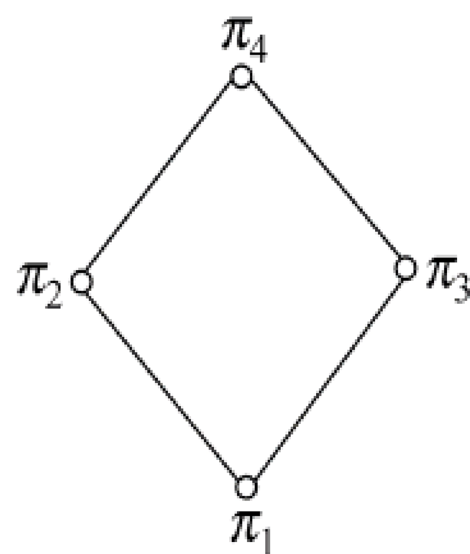


图　4.7

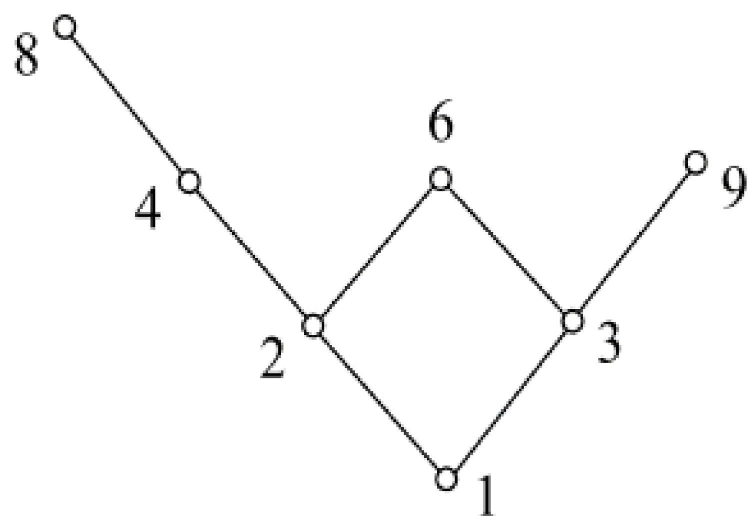


图　4.8

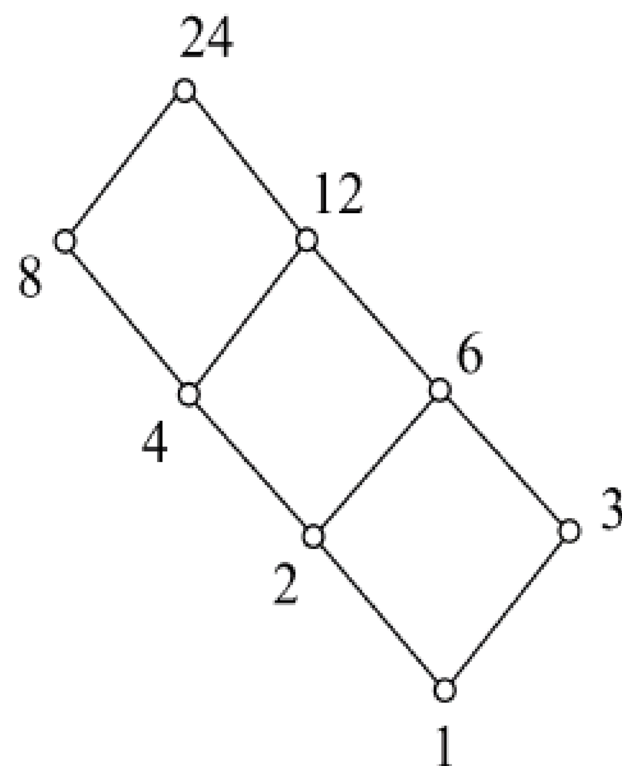


图　4.9

4.34　(1) $X=\{a,b,c,d,e,f\}$,则

$$\preccurlyeq=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle a,f\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,e\rangle,\langle c,f\rangle,\langle d,f\rangle\}\cup I_X$$

(2) 极大元e,f;极小元a;最大元不存在,最小元a.

4.35　哈斯图如图4.10所示.

(a) 极大元与最大元为1,极小元为2和3,没有最小元.

(b) 极大元2和3,没有最大元;极小元和最小元为4.

4.36　A_1的上界为6,最小上界也是6;A_1的下界为1,最大下界也是1.A_2没有上界与最小上界;A_2的下界和最大下界为1.

4.37　2、3、5、7为素数,每个数只有1个质因子.4、8、9中的每个数也只有1个质因子.只有6有2个质因子,于是6是最大元.哈斯图如图4.11所示.

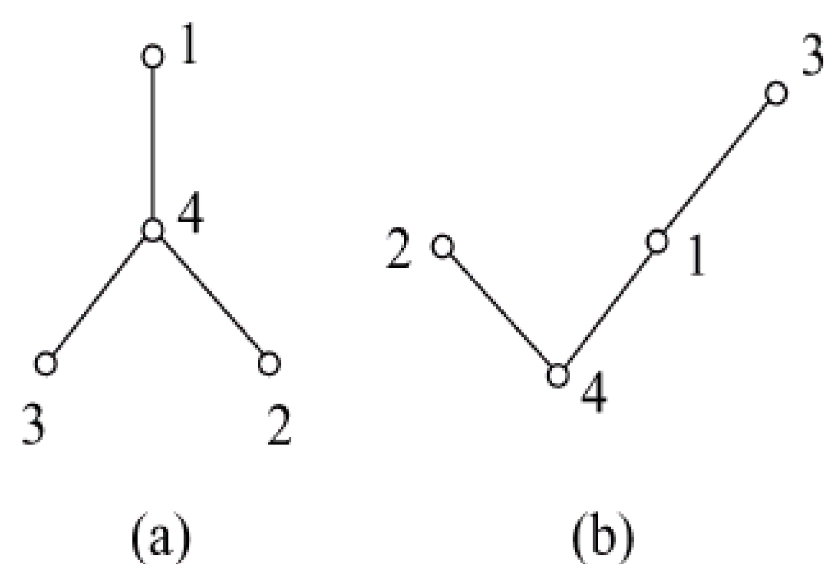


图 4.10

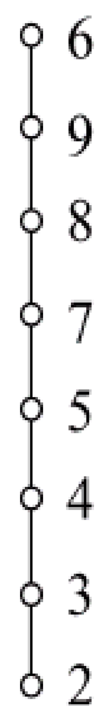


图 4.11

4.38 考虑偏序关系的哈斯图.将这些哈斯图按照偏序关系中的边数进行分类：没有边对应的是恒等关系.含有1条边$\langle i,j\rangle$,这样的边对应于从1、2、3中选2个数的一种选法,由于有6种选法,因此有6个不同的偏序关系.含2条边的全序关系有6种,对应于1、2、3的6个排列,而含2条边的非全序的偏序关系或者有1个极大元和2个极小元;或者有2个极大元和1个极小元,总共也是6种.综合上述,3元集合上有19个不同的偏序关系,其中6个是全序关系.

4.39 (1) 假若存在$x\in A$,使得$\langle x,x\rangle\in R-I_A$,那么必有$\langle x,x\rangle\notin I_A$,于是$x\notin A$,与$x\in A$矛盾.这就证明了$R-I_A$是反自反的.

任取$\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle$,则

$$
\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle\in R-I_A\wedge\langle y,z\rangle\in R-I_A\\
\Rightarrow&\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\wedge\langle x,y\rangle\notin I_A\wedge\langle y,z\rangle\notin I_A\\
\Rightarrow&\langle x,z\rangle\in R\wedge x\neq y\wedge y\neq z
\end{aligned}
$$

如果$x=z$,那么就有$\langle x,y\rangle\in R,\langle y,x\rangle\in R$,且$x\neq y$,与$R$为反对称关系矛盾.所以$\langle x,z\rangle\notin I_A$.于是得到$\langle x,z\rangle\in R-I_A$.综合上述,$R-I_A$具有反自反性和传递性,是$A$上的拟序关系.

(2) 显然$S\cup I_A$为A上的自反关系.任取$\langle x,y\rangle\in S\cup I_A$,如果$x\neq y$,那么$\langle x,y\rangle\in S$,由于$S$的反对称性,一定有$\langle y,x\rangle\notin S$,于是得到$\langle y,x\rangle\notin S\cup I_A$.如果$x=y$,那么$\langle x,y\rangle\in S\cup I_A$且$\langle y,x\rangle\in S\cup I_A$蕴涵$x=y$.于是$S\cup I_A$是反对称的.最后证明传递性.任取$\langle x,y\rangle$,$\langle y,z\rangle$,则

$$
\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle\in S\cup I_A\wedge\langle y,z\rangle\in S\cup I_A\\
\Rightarrow&(\langle x,y\rangle\in S\vee\langle x,y\rangle\in I_A)\wedge(\langle y,z\rangle\in S\vee\langle y,z\rangle\in I_A)\\
\Rightarrow&(\langle x,y\rangle\in S\wedge\langle y,z\rangle\in S)\vee(\langle x,y\rangle\in S\wedge y=z)\\
&\vee(x=y\wedge\langle y,z\rangle\in S)\vee(x=y\wedge y=z)\\
\Rightarrow&\langle x,z\rangle\in S\vee\langle x,z\rangle\in S\vee\langle x,z\rangle\in S\vee\langle x,z\rangle\in I_A\\
\Rightarrow&\langle x,z\rangle\in S\cup I_A
\end{aligned}
$$

综合上述,$S\cup I_A$具有自反、反对称和传递性,是A上的偏序关系.

4.40 证明：设A是偏序集中最大的反链,A含有n个元素.假若偏序集能够分解成$n-1$条链,根据鸽巢原理(见主教材定理4.4的证明),A的n个元素中必有2个元素取自同一条链.于是,这2个元素可比,与A为反链矛盾.

第 5 章 函 数

5.1 内容提要

1. 函数

设 f 是二元关系，如果对于任意 $x\in \mathrm{dom}f$，都存在唯一的 $y\in \mathrm{ran}f$，使得 xfy 成立，则称 f 为**函数**(或者**映射**). 这时也称 y 为 f 在 x 的**值**，记作 $y=f(x)$.

2. 函数相等

设 f,g 为函数，则 $f=g\Leftrightarrow f\subseteq g\land g\subseteq f$.

两个函数 f 和 g 相等，一定满足下面两个条件：

(1) $\mathrm{dom}f=\mathrm{dom}g$.

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}f=\mathrm{dom}g$ 都有 $f(x)=g(x)$.

3. 特殊的函数

从 A 到 B 的函数 $f: A\to B$，其中 A、B 为集合，f 为函数，$\mathrm{dom}f=A$，$\mathrm{ran}f\subseteq B$.

所有从 A 到 B 的函数的集合，记作 B^A，符号化表示为 $B^A=\{f\mid f: A\to B\}$.

特殊函数 $f: A\to B$.

(1) 如果存在 $c\in B$ 使得对所有的 $x\in A$ 都有 $f(x)=c$，则称 $f: A\to B$ 是**常函数**.

(2) A 上的**恒等函数** I_A，对所有的 $x\in A$ 都有 $I_A(x)=x$.

(3) 设 $\langle A,\leqslant\rangle$，$\langle B,\leqslant\rangle$ 为偏序集，$f: A\to B$，如果对任意的 $x_1,x_2\in A$，$x_1\prec x_2$，就有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 f 为**单调递增**的；如果对任意的 $x_1,x_2\in A$，$x_1\prec x_2$，就有 $f(x_1)\prec f(x_2)$，则称 f 为**严格单调递增**的. 类似地也可以定义**单调递减**和**严格单调递减**的函数.

(4) 设 A 为集合，对于任意的 $A'\subseteq A$，A' 的**特征函数** $\chi_{A'}: A\to\{0,1\}$ 定义为

$$\chi_{A'}(a)=1 \qquad a\in A'$$
$$\chi_{A'}(a)=0 \qquad a\in A-A'$$

(5) 设 R 是 A 上的等价关系，令

$$g: A\to A/R$$
$$g(a)=[a], \quad \forall a\in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的**自然映射**.

4. 函数的像与完全原像

设函数 $f: A\to B$，$A_1\subseteq A$，$B_1\subseteq B$.

(1) A_1 在 f 下的**像** $f(A_1)=\{f(x)\mid x\in A_1\}$，当 $A_1=A$ 时，$f(A)$称为**函数的像**.

(2) B_1 在 f 下的**完全原像** $f^{-1}(B_1)=\{x\mid x\in A\land f(x)\in B_1\}$.

注意函数的值与函数的像之间的区别,函数值 $f(x)\in B$,而像 $f(A_1)\subseteq B$.

一般说来,函数的像和完全原像满足 $A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$ 和 $f(f^{-1}(B_1))\subseteq B_1$.

5. 函数的性质

设 $f: A\to B$,则

(1) 若 $\mathrm{ran} f=B$,则称 $f: A\to B$ 是**满射**的.

(2) 若 $\forall y\in \mathrm{ran} f$ 都存在唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$,则称 $f: A\to B$ 是**单射**的.

(3) 若 $f: A\to B$ 既是满射又是单射的,则称 $f: A\to B$ 是**双射**的.

6. 函数合成与反函数

定理 5.1 设 f、g 是函数,则 $f\circ g$ 也是函数,且满足:

(1) $\mathrm{dom}(f\circ g)=\{x\mid x\in \mathrm{dom} f \wedge f(x)\in \mathrm{dom} g\}$.

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}(f\circ g)$ 有 $f\circ g(x)=g(f(x))$.

推论 1 设 f、g、h 为函数,则 $(f\circ g)\circ h$ 和 $f\circ(g\circ h)$ 都是函数,且

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$$

推论 2 设 $f: A\to B$,$g: B\to C$,则 $f\circ g: A\to C$,且 $\forall x\in A$ 都有 $f\circ g(x)=g(f(x))$.

定理 5.2 设 $f: A\to B$,$g: B\to C$.

(1) 如果 $f: A\to B$,$g: B\to C$ 都是满射的,则 $f\circ g: A\to C$ 也是满射的.

(2) 如果 $f: A\to B$,$g: B\to C$ 都是单射的,则 $f\circ g: A\to C$ 也是单射的.

(3) 如果 $f: A\to B$,$g: B\to C$ 都是双射的,则 $f\circ g: A\to C$ 也是双射的.

定理 5.3 设 $f: A\to B$,则 $f=f\circ I_B=I_A\circ f$.

推论 设 $f: A\to A$,则 $f=f\circ I_A=I_A\circ f$.

定理 5.4 设 $f: A\to B$ 是双射的,则 $f^{-1}: B\to A$ 也是双射的.

对于双射函数 $f: A\to B$,称 $f^{-1}: B\to A$ 是它的**反函数**.

定理 5.5 设 $f: A\to B$ 是双射的,则

$$f^{-1}\circ f=I_B,\quad f\circ f^{-1}=I_A$$

5.2 习 题

5.1 从下面各题的备选答案中选出一个正确的答案.

(1) 设 $X=\{a,b,c,d\}$,$Y=\{1,2,3\}$,$f=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,3\rangle\}$,则 f 是

A. 从 X 到 Y 的二元关系,但不是从 X 到 Y 的函数.

B. 从 X 到 Y 的函数,但不是满射,也不是单射.

C. 从 X 到 Y 的满射,但不是单射.

D. 从 X 到 Y 的双射.

(2) 下面定义中的哪些 f 是从实数集 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的双射函数?

A. $f(x)=1, x>0$; $f(x)=-1, x\leqslant 0$.

B. $f(x)=\ln x, x>0$.

C. $f(x)=1/(x^3+8)$, $x\neq -2$.

D. $f(x)=x^3+8$.

5.2 设 $f: \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$,$\mathbf{Z}$ 为整数集,$\forall\langle n,k\rangle\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$,$f(\langle n,k\rangle)=n^2k$,求 f 的值域.

5.3　设 $A=\{a,b\}$，$B=\{0,1,2\}$，计算 $B^A=\{f|f: A\to B\}$.

5.4　设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x^2-3x+2$，其中 $\mathbf{R}$ 为实数集，计算以下各小题.

(1) $f(5)$　　(2) $f^{-1}(\{-6\})$　　(3) $f(\{1,3\})$

5.5　$A=\{a_1,a_2,a_3\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$，σ 为从 A 到 B 的函数，$\sigma=\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_4\rangle,\langle a_3,b_2\rangle\}$，说明 σ 是否为单射、满射和双射的.

5.6　设 $A=\{a,b,c\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}\cup I_A$ 是 A 上的等价关系，设自然映射 g：$A\to A/R$，求 $g(a)$.

5.7　设 f：$\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(\langle x,y\rangle)=x+y+1$.

(1) 说明 f 是否为单射和满射，如果不是请说明理由.

(2) 令 $A=\{\langle x,y\rangle|\ x,y\in\mathbf{N}$ 且 $f(\langle x,y\rangle)=3\}$，求 A.

(3) 令 $B=\{f(\langle x,y\rangle)\ |\ x,y\in\{1,2,3\}$且 $x=y\}$，求 B.

5.8　指出下列函数中哪些是双射的？其中，$\mathbf{R}$ 是实数集，$\mathbf{N}$ 为自然数集.

(1) f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x^2-x$.

(2) f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x^3$.

(3) f：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x)=x+5$.

(4) f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$，$f(x)=2^x$，$\mathbf{R}^+=\{x\ |\ x\in\mathbf{R}\wedge x>0\}$.

(5) f：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x)=2x$.

(6) f：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(x)=|x|$.

5.9　设 f：$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$，$f(\langle n,k\rangle)=n^2k$，其中，$\mathbf{Z}$ 为整数集.

(1) f 是满射的吗？为什么？

(2) f 是单射的吗？为什么？

(3) 求 $f^{-1}(\{0\})$.

(4) 求 $f^{-1}(\mathbf{N})$.

(5) 求 $f(\mathbf{Z}\times\{1\})$.

5.10　设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$ 为实数集，对下面各个 f，判断它是否为单射、满射或双射的. 如果它不是单射的，给出 x_1 和 x_2，使得 $x_1\neq x_2$ 但 $f(x_1)=f(x_2)$. 如果它不是满射的，计算 $f(\mathbf{R})$.

(1) $f(x)=x^2$.

(2) $f(x)=E[x]$（$E[x]$表示小于等于 x 的最大整数）.

5.11　试给出一个单射而非满射的函数.

5.12　设 f：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，$f(n)=\langle n,n+1\rangle$.

(1) 说明 f 是否为单射和满射，并说明理由.

(2) f 的反函数是否存在？如果存在，求出这个反函数.

(3) 求 $\mathrm{ran}f$.

5.13　设 f：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{C}$，$f(\langle x,y\rangle)=x+y\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^2=-1$，说明 f 是否为单射、满射、双射的，计算 $f^{-1}(\{4+2\mathrm{i}\})$.

5.14　(1) 确定函数 f：$\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(\langle x,y\rangle)=xy$ 是否为单射、满射、双射的，如果不是请说明理由. 计算 $f(\mathbf{N}\times\{1\})$，$f^{-1}(\{0\})$.

(2) 设 f：$\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(\langle x,y\rangle)=|x-y|$，说明 f 有什么性质（单射、满射、双射），计算

$f(\mathbf{N}\times\{0\})$ 和 $f^{-1}(\{0\})$.

5.15 设 $R[t]$ 为 t 的实系数多项式的集合,$R_n[t]\subseteq R[t]$,$n\in\mathbf{N}$,$R_n[t]$ 为 t 的 n 次实系数多项式的集合.定义函数 $f: R[t]\to R[t]$,$f(g(t))=g^2(t)$.求 $f(R_0[t])$,$f^{-1}(\{t^2+2t+1\})$,$f^{-1}(f(\{t-1,t^2-1\}))$.

5.16 设 $f: \mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,$f(\langle x,y\rangle)=x^2+y^2$,说明 f 是否为单射的、满射的.计算 $f^{-1}(\{0\})$,$f(\{\langle 0,3\rangle,\langle 1,2\rangle\})$.

5.17 设 $\mathbf{R}$ 为实数集,$f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$f(x)=x^2-x+2$,$g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$g(x)=x-3$.

(1) 求 $f\circ g$,$g\circ f$.

(2) 如果 f 和 g 存在反函数,求出它们的反函数.

5.18 设 $f: \mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$,$f(x)=x+5$,其中,$\mathbf{Z}$ 为整数集.

(1) 说明 f 是否为满射和单射的.

(2) f^{-1} 还是函数吗?若是,写出 f^{-1} 的函数表达式;若不是,请说出理由.

5.19 设 $\mathbf{R}$ 为实数集,映射 σ、τ 满足 $\sigma: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$\sigma(x)=x^2+2x+1$,$\tau: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$\tau(x)=x/2$.

(1) 求 $\tau\circ\sigma$,$\sigma\circ\tau$.

(2) 对于 τ、σ 中的双射函数求反函数.

5.20 设 A、B 为有限集,且 $|A|=m$,$|B|=n$,如果从 A 到 B 存在单射、满射或双射函数,那么 m 与 n 应该满足的条件是什么?

5.21 设 $\sigma: R\to R$,$\sigma(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 3\\ -2 & x<3\end{cases}$,$\tau: R\to R$,$\tau(x)=x+2$,求 $\sigma\circ\tau$ 和 $\tau\circ\sigma$.

5.22 对于以下给定的每组集合 A 和 B,构造从 A 到 B 的双射函数.

(1) $A=2\mathbf{Z}=\{2k\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$,$B=\mathbf{N}$,其中,$\mathbf{Z}$ 为整数集,$\mathbf{N}$ 为自然数集.

(2) $A=\mathbf{R}$,$B=(0,+\infty)$,其中,$\mathbf{R}$ 为实数集.

(3) $A=P(\{a,b\})$,$B=\{0,1\}^{\{a,b\}}$,其中 A 为 $\{a,b\}$ 的幂集,$B=\{f\,|\,f: \{a,b\}\to\{0,1\}\}$.

5.23 设 $f,g\in\mathbf{N}^{N}$,$\mathbf{N}$ 为自然数集,且

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x=0,1,2,3\\ 0 & x=4\\ x & x\geqslant 5\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & x\text{ 为偶数}\\ 3 & x\text{ 为奇数}\end{cases}$$

(1) 求 $f\circ g$,并讨论它的性质(是否为单射或满射).

(2) 设 $A=\{0,1,2\}$,$B=\{0,1,5,6\}$,求 A 在 $f\circ g$ 下的像 $f\circ g(A)$ 和 B 的完全原像 $(f\circ g)^{-1}(B)$.

*5.24 设满射函数 $f: A\to A$,且 $f\circ f=f$,证明 $f=I_A$.

*5.25 设 $f: A\to B$ 为单射函数,$G: P(A)\to P(B)$,$G(X)$ 为 X 在 f 下的像.证明 G 也是单射的.

*5.26 已知集合 A,B,其中 $A\neq\varnothing$,$\langle B,\preccurlyeq\rangle$ 是偏序集,定义 B^A 上的二元关系 R 如下:

$$fRg\Leftrightarrow f(x)\preccurlyeq g(x),\quad \forall x\in A$$

(1) 证明 R 为 B^A 上的偏序.

(2) 给出 $\langle B^A, R\rangle$ 存在最大元的充分必要条件和最大元的一般形式.

*5.27　$f: A\to B$ 导出的 A 上的等价关系 R 定义如下：$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A$ 且 $f(x)=f(y)\}$. 设 $f_1,f_2,f_3,f_4\in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$，且

$$f_1(n)=n \qquad \forall n\in\mathbf{N}$$
$$f_2(n)=1 \qquad n\text{ 为奇数；} f_2(n)=0, n\text{ 为偶数}$$
$$f_3(n)=j \qquad n=3k+j, j=0,1,2, k\in\mathbf{N}$$
$$f_4(n)=j \qquad n=6k+j, j=0,1,\cdots,5, k\in\mathbf{N}$$

R_i 为 f_i 导出的等价关系，$i=1,2,3,4$.

(1) 求商集 $\mathbf{N}/R_i, i=1,2,3,4$.

(2) 画出偏序集 $\langle\{\mathbf{N}/R_1,\mathbf{N}/R_2,\mathbf{N}/R_3,\mathbf{N}/R_4\},\preccurlyeq\rangle$ 的哈斯图，其中 $\preccurlyeq$ 为划分间的加细关系(见习题4.31).

(3) 求 $H=\{10k \mid k\in\mathbf{N}\}$ 在 f_1,f_2,f_3,f_4 下的像.

*5.28　证明定理5.3：设 $f: A\to B$，则 $f=f\circ I_B=I_A\circ f$.

5.3　习题解答与分析

5.1　(1) A.　(2) D.

说明：(1) 因为 $\mathrm{dom} f=\{a,b,c\}\neq X$.

(2) A 中函数不是单射的，因为 $f(2)=f(1)$；B 和 C 中函数的定义域不是实数集合 $\mathbf{R}$，而是实数集合的真子集；D 中函数满足要求.

5.2　$\mathrm{ran} f=\{n^2k \mid n,k\in\mathbf{Z}\}=\mathbf{Z}$.

5.3　$B^A=\{f_1,f_2,\cdots,f_9\}$，其中：

$$f_1=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle\},\quad f_2=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle\},\quad f_3=\{\langle a,0\rangle,\langle b,2\rangle\},$$
$$f_4=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle\},\quad f_5=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\},\quad f_6=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle\},$$
$$f_7=\{\langle a,2\rangle,\langle b,0\rangle\},\quad f_8=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\},\quad f_9=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle\}.$$

5.4　(1) $f(5)=5^2-3\times5+2=12$.

(2) $f^{-1}(\{-6\})=\{x \mid f(x)=-6\}$，由于 $f(x)$ 的最小值是 $-1/4$，因此 $f^{-1}(\{-6\})=\varnothing$.

(3) $f(\{1,3\})=\{f(1),f(3)\}=\{0,2\}$.

5.5　σ 是单射，不是满射和双射.

5.6　$g(a)=[a]=\{a,b\}$.

5.7　(1) 不是单射，因为 $f(\langle1,2\rangle)=f(\langle2,1\rangle)$；不是满射，因为 $0\notin\mathrm{ran} f$.

(2) 对于任意自然数 x,y，$\langle x,y\rangle\in A\Leftrightarrow x+y+1=3\Leftrightarrow x+y=2$，于是 $A=\{\langle1,1\rangle,\langle2,0\rangle,\langle0,2\rangle\}$.

(3) 对于任意自然数 x,y，$f(\langle x,y\rangle)\in B\Leftrightarrow x=y=1,2,3$，$B=\{1+1+1,2+2+1,3+3+1\}=\{3,5,7\}$.

5.8　(2)、(4)和(6)为双射.

说明：对于实数区间上的函数，如果在区间上是单调的，那么该函数是单射的. 例如(2)和(4)中的函数是单调的，因此是单射的；(1)中的函数不是单调的，因此不是单射的. 对于满

射性的判断,则需要考虑 $\mathrm{ran}f$. 例如(3)中的函数,$0\notin\mathrm{ran}f$,因此不是满射的. 对于(5)中的函数,$1\notin\mathrm{ran}f$.

5.9 (1) f 是满射,当 $n=1$ 时,$f(\langle n,k\rangle)=k$,k 可以是任意整数.

(2) f 不是单射,因为 $f(\langle 2,1\rangle)=f(\langle -2,1\rangle)$.

(3) $f^{-1}(\{0\})=(\mathbf{Z}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbf{Z})$.

(4) $f^{-1}(\mathbf{N})=\mathbf{Z}\times\mathbf{N}$.

(5) $f(\mathbf{Z}\times\{1\})=\{n^2\mid n\in\mathbf{N}\}$.

5.10 (1) f 不是单射,因为 $f(1)=f(-1)$;f 不是满射,$\mathrm{ran}f=\mathbf{R}^+\cup\{0\}$.

(2) f 不是单射,因为 $f(0.2)=f(0.3)=0$;不是满射,$\mathrm{ran}f=\mathbf{Z}$.

5.11 f: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, $f(x)=2x$.

说明:对于有穷集合 A,任何 A 上的单射函数,同时也是 A 上的满射函数,因此也是双射函数;为了构造集合上的单射而非满射的函数,或者构造集合上的满射而非单射的函数,只能选择无穷集合.最简单的无穷集合是自然数集合.

5.12 (1) f 是单射,当 $m\neq n$ 时 $\langle n,n+1\rangle\neq\langle m,m+1\rangle$;$f$ 不是满射,$\langle 0,0\rangle\notin\mathrm{ran}f$.

(2) f 不存在反函数.

(3) $\mathrm{ran}f=\{\langle n,n+1\rangle\mid n\in\mathbf{N}\}$.

5.13 f 是双射,且 $f^{-1}(\{4+2\mathrm{i}\})=\{\langle 4,2\rangle\}$.

5.14 (1) f 不是单射,因为 $f(\langle 1,2\rangle)=f(\langle 2,1\rangle)$;是满射,不是双射.

$$f(\mathbf{N}\times\{1\})=\mathbf{N},\quad f^{-1}(\{0\})=(\mathbf{N}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbf{N})$$

(2) f 不是单射,因为 $f(\langle 1,2\rangle)=f(\langle 2,1\rangle)$;$f$ 是满射,不是双射.

$$f(\mathbf{N}\times\{0\})=\mathbf{N},\quad f^{-1}(\{0\})=\{\langle n,n\rangle\mid n\in\mathbf{N}\}$$

5.15 $f(R_0[t])=\mathbf{R}^+\cup\{0\}$,

$f^{-1}(\{t^2+2t+1\})=\{t+1,-t-1\}$,

$f^{-1}(f(\{t-1,t^2-1\}))=\{t-1,1-t,t^2-1,1-t^2\}$.

5.16 f 不是单射的,f 不是满射的,则

$$f^{-1}(\{0\})=\{\langle 0,0\rangle\},\quad f(\{\langle 0,3\rangle,\langle 1,2\rangle\})=\{5,9\}$$

5.17 (1) $f\circ g$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f\circ g(x)=x^2-x-1$, $g\circ f$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g\circ f(x)=x^2-7x+14$.

(2) g 存在反函数,g^{-1}: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g^{-1}(x)=x+3$.

5.18 (1) f 是满射的,也是单射的.

(2) f^{-1}是函数,f^{-1}: $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$, $f^{-1}(x)=x-5$.

5.19 (1) $\tau\circ\sigma$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\tau\circ\sigma(x)=\frac{1}{4}x^2+x+1$, $\sigma\circ\tau$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\sigma\circ\tau(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$.

(2) τ^{-1}: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\tau^{-1}(x)=2x$.

5.20 存在从 A 到 B 的单射函数当且仅当 $m\leqslant n$;存在从 A 到 B 的满射函数当且仅当 $m\geqslant n$;存在从 A 到 B 的双射函数当且仅当 $m=n$.

5.21 $\sigma\circ\tau(x)=\begin{cases}x^2+2 & x\geqslant 3\\ 0 & x<3\end{cases}$, $\quad\tau\circ\sigma(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & x\geqslant 1\\ -2 & x<1\end{cases}$

注意:对于分段函数,在求复合函数时,可能分段点会发生改变,如本题中的 $\tau\circ\sigma$ 的分段点不是3,而是1.

5.22　(1) f：$2\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$，　$f(x)=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ |x|-1 & x<0 \end{cases}$.

(2) f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$，$f(x)=e^x$.

(3) f：$P(\{a,b\})\to\{0,1\}^{\{a,b\}}$，$f(T)=\chi_T$，其中 χ_T 为 T 的特征函数.

说明：如果构造两个实数区间之间的双射函数，一般可以选择直线方程或者其他适当的严格单调函数；如果构造一个集合到自然数集合的双射函数，一般将这个集合的元素排成一个线序，然后将最小元与 0 对应，后面的元素顺序与自然数建立对应关系.

5.23　(1)

$$f\circ g(x)=\begin{cases} x/2 & x\geqslant 6,\ x\text{ 为偶数} \\ 3 & x\geqslant 5\text{ 且 }x\text{ 为奇数},\ x=0,2 \\ 0 & x=4 \\ 1 & x=1 \\ 2 & x=3 \end{cases}$$

$f\circ g$ 不是单射，是满射.

(2)
$$f\circ g(A)=\{g(f(0)),g(f(1)),g(f(2))\}=\{1,3\}$$
$$(f\circ g)^{-1}(B)=\{x\,|\,g(f(x))\in\{0,1,5,6\}\}=\{1,4,10,12\}$$

*5.24　任取 $y\in A$，必有 $x\in A$ 使得 $\langle x,y\rangle\in f$，由题设有 $\langle x,y\rangle\in f\circ f$，因此存在 $z\in A$ 使得 $\langle x,z\rangle\in f$ 且 $\langle z,y\rangle\in f$. 由于 $f(x)$ 是唯一的，因此 $y=z$，从而 $\langle y,y\rangle\in f$. 由于 y 的任意性，知 $I_A\subseteq f$.

任取 $\langle x,y\rangle\in f$，根据上面的证明，$I_A\subseteq f$，有 $\langle x,x\rangle\in f$，因为 $f(x)$ 是唯一的，从而得到 $x=y$. 这就证明了 $f\subseteq I_A$. 综合上述命题得证.

*5.25　假设 $A_1,A_2\in P(A)$，$A_1\neq A_2$，不妨设存在 x，使得 $x\in A_1\wedge x\notin A_2$，因此 $f(x)\in f(A_1)$ 且由 f 的单射性知 $f(x)\notin f(A_2)$. 于是 $f(A_1)\neq f(A_2)$. 从而 $G(A_1)\neq G(A_2)$.

*5.26　(1) 任取 $f\in B^A$，$\forall x\in A$，$f(x)=f(x)$，由于偏序 $\preccurlyeq$ 的自反性，$f(x)\preccurlyeq f(x)$，于是 fRf 成立. 对任意 $f,g\in B^A$，$\forall x\in A$，则

$$fRg\wedge gRf\Rightarrow f(x)\preccurlyeq g(x)\wedge g(x)\preccurlyeq f(x)\Rightarrow f(x)=g(x)$$

于是 $f=g$. 对任意 $f,g,h\in B^A$，$\forall x\in A$，则

$$fRg\wedge gRh\Rightarrow f(x)\preccurlyeq g(x)\wedge g(x)\preccurlyeq h(x)\Rightarrow f(x)\preccurlyeq h(x)$$

从而得到 fRh. 综合上述，R 具有自反、反对称、传递性，是偏序关系.

(2) 充要条件是：偏序集 $\langle B,\preccurlyeq\rangle$ 存在最大元. 设 B 的最大元为 b，那么 B^A 上的最大元为 f：$A\to B$，$f(x)=b$.

*5.27　(1) $\forall x,y\in\mathbf{N}$，$xR_iy\Leftrightarrow f_i(x)=f_i(y)$，$i=1,2,3,4$，于是

$$xR_1y\Leftrightarrow x=y$$
$$xR_2y\Leftrightarrow x\text{ 与 }y\text{ 具有相同的奇偶性}$$
$$xR_3y\Leftrightarrow x\equiv y\pmod 3$$
$$xR_4y\Leftrightarrow x\equiv y\pmod 6$$

从而得到

$$\mathbf{N}/R_1=\{\{n\}\mid n\in\mathbf{N}\}$$
$$\mathbf{N}/R_2=\{2\mathbf{N},\mathbf{N}-2\mathbf{N}\}$$
$$\mathbf{N}/R_3=\{3\mathbf{N},3\mathbf{N}+1,3\mathbf{N}+2\}$$
$$\mathbf{N}/R_4=\{6\mathbf{N},6\mathbf{N}+1,6\mathbf{N}+2,6\mathbf{N}+3,6\mathbf{N}+4,6\mathbf{N}+5\}$$

其中

$$k\mathbf{N}=\{kn\mid n\in\mathbf{N}\},k\mathbf{N}+i=\{kn+i\mid n\in\mathbf{N}\}$$

(2) 哈斯图如图5.1所示.

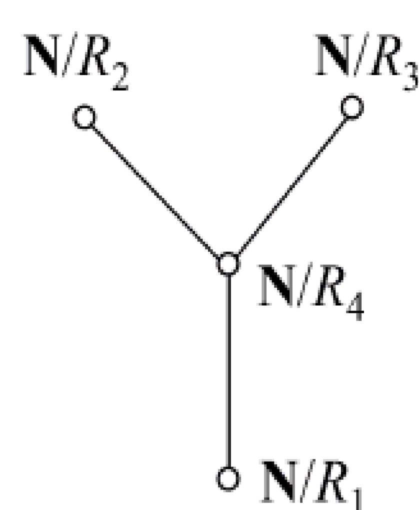


图 5.1

(3) $f_1(H)=H$,

$f_2(H)=\{0\}$,

$f_3(H)=\{0,1,2\}$,

$f_4(H)=\{0,2,4\}$.

*5.28 任取$\langle x,y\rangle$,则

$$\langle x,y\rangle\in I_A\circ f\Leftrightarrow\exists t(\langle x,t\rangle\in I_A\wedge\langle t,y\rangle\in f)$$
$$\Rightarrow\langle x,x\rangle\in I_A\wedge\langle x,y\rangle\in f\Rightarrow\langle x,y\rangle\in f$$

任取$\langle x,y\rangle$,则

$$\langle x,y\rangle\in f\Rightarrow\langle x,x\rangle\in I_A\wedge\langle x,y\rangle\in f\Rightarrow\langle x,y\rangle\in I_A\circ f$$

因此 $I_A\circ f=f$. 同理可证 $f\circ I_B=f$.

第 6 章 图

6.1 内容提要

1. 图的基本概念

图 无向图、有向图、n 阶图、n 阶零图、平凡图、标定图、非标定图、基图(将有向图 D 的所有有向边均用无向边代替所得无向图 G 为 D 的基图).

图的顶点与边的关联关系 顶点与边的关联关系、关联次数、环、孤立点.

图中顶点与顶点以及边与边的关系 无向图中,顶点与顶点的相邻关系、边与边的相邻关系;有向图中,顶点与顶点之间的邻接关系、边与边的相邻关系.

简单图 平行边、多重图、简单图.

顶点的度数 G 为无向图,G 中顶点 v 的度数 $d(v)$、G 的最大度 $\Delta(G)$、G 的最小度 $\delta(G)$;D 为有向图,D 中顶点的度数 $d(v)$、v 的出度 $d^+(v)$、v 的入度 $d^-(v)$、D 的最大度 $\Delta(D)$、D 的最小度 $\delta(D)$、D 的最大出度 $\Delta^+(D)$、D 的最小出度 $\delta^+(D)$、D 的最大入度 $\Delta^-(D)$、D 的最小入度 $\delta^-(D)$;奇度顶点、偶度顶点、度数列.

握手定理 任何图中,所有顶点的度数之和等于边数的两倍;在有向图中,所有顶点的入度之和与出度之和都等于边数.

握手定理的推论 任何图中,奇度顶点为偶数个.

几种特殊的简单图 无向完全图 $K_n(n\geqslant 1)$、有向完全图、k-正则图、圈图、轮图、方体图.

子图 子图、真子图、生成子图、导出子图.

补图 n 阶无向简单图 G 的补图 $\overline{G}$,$G\cup\overline{G}=K_n$.

图的同构 两图同构的定义、图之间同构的性质(自反性、对称性、传递性).

2. 图的连通性

通路与回路 通路、通路长度、初级通路(路径)、简单通路、复杂通路;回路(是通路的特殊情况)、初级回路(圈)、简单回路、复杂回路.

通路与回路的主要性质:

定理 6.1 在 n 阶图中,若从顶点 u 到 $v(u\neq v)$存在通路,则 u 到 v 存在长度$\leqslant n-1$ 的初级通路(路径).

定理 6.2 在一个 n 阶图中,若 v 到 v 存在回路,则一定存在 v 到 v 的长度$\leqslant n$ 的回路;并且,若 v 到 v 存在简单回路,则 v 到 v 一定存在长度$\leqslant n$ 的初级回路(圈).

无向图的连通性 顶点之间的连通关系、无向连通图、非连通图、连通分支、顶点之间的

短程线与距离.

无向图的连通度 点割集、割点、边割集、割边(桥)、图 G 的点连通度 $\kappa(G)$、边连通度 $\lambda(G)$.

定理 6.3 对于任何无向图 G,均有

$$\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$$

有向图的连通性 顶点之间的可达关系、相互可达关系;弱连通图、单向连通图、强连通图.

有向图连通性的判别法:

判别法 1 若有向图 D 的基图是连通图,则 D 为弱连通图.

判别法 2 若有向图 D 中存在经过每个顶点至少一次的通路,则 D 为单向连通图.

判别法 3 若有向图 D 中存在经过每个顶点至少一次的回路,则 D 是强连通图.

有向图中各种连通性之间的关系 D 是强连通的,则 D 一定为单向连通的;D 是单向连通的,则 D 一定是弱连通的.

3. 图的矩阵表示

无向图的关联矩阵 无向图 G 的关联矩阵 $\boldsymbol{M}(G)=(m_{ij})_{n\times m}$,其中 m_{ij} 为顶点 v_i 与边 e_j 的关联次数.

有向图的关联矩阵 无环有向图 D 的关联矩阵 $\boldsymbol{M}(D)=(m_{ij})_{n\times m}$,若顶点 v_i 是边 e_j 的始点,则 $m_{ij}=1$;若 v_i 是 e_j 的终点,则 $m_{ij}=-1$;若 v_i 与 e_j 不关联,则 $m_{ij}=0$.

有向图的邻接矩阵 有向图 D 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$,$a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到 v_j 的边的条数. $\boldsymbol{A}^l=(a_{ij}^{(l)})_{n\times n}$ 为 D 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 l 次幂.

定理 6.4 在 $\boldsymbol{A}^l(l\geqslant 1)$ 中,元素 $a_{ij}^{(l)}$ 为顶点 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数,$\sum\limits_{i,j}a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数,其中 $\sum\limits_{i}a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

无向图的相邻矩阵 无向图 G 的相邻矩阵 $A=(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$,$a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 与 v_j 之间的边数.

相邻矩阵是对称的. 类似邻接矩阵,可以用相邻矩阵的幂计算无向图中各种长度的通路和回路数.

图的可达矩阵 图(有向图和无向图)的可达矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$,其中,当顶点 v_i 可达 v_j 时,$p_{ij}=1$;否则 $p_{ij}=0$. 特别注意,对角元素 $p_{ii}=1$.

4. 几种特殊的图

二部图:

二部图、二部图中互补顶点子集、n 阶零图(含平凡图)为二部图、完全二部图 $K_{r,s}$. 匹配、极大匹配、最大匹配、完备匹配、完美匹配.

二部图的判别定理 图 G 为二部图当且仅当 G 中不含长度为奇数的回路.

有完备匹配的充分必要条件(Hall 定理) 设二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$,其中 $|V_1|\leqslant|V_2|$,则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配当且仅当 V_1 中任意 $k(k=1,2,\cdots,|V_1|)$ 个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻. 该条件称为相异性条件.

有完备匹配的充分条件 设二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$,其中 $|V_1|\leqslant|V_2|$,如果存在正整数 t,使得 V_1 中每个顶点至少关联 t 条边,而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边,则 G 中存在 V_1

到 V_2 的完备匹配. 这个条件称作 t 条件.

欧拉图：

欧拉通路、欧拉回路、欧拉图、平凡欧拉图.

无向欧拉图的判别定理　无向图 G 为欧拉图当且仅当 G 连通且无奇度顶点；G 有欧拉通路但无欧拉回路当且仅当 G 连通且有两个奇度顶点.

有向欧拉图的判别定理　有向图 D 为欧拉图当且仅当 D 连通且每个顶点的入度等于出度；有向图 D 有欧拉通路但无欧拉回路当且仅当 D 连通，且 D 中有一个顶点入度比出度大 1，另有一个顶点入度比出度小 1，其余顶点的入度均等于出度.

哈密顿图：

哈密顿通路、哈密顿回路、哈密顿图、平凡哈密顿图.

哈密顿图的一个必要条件　无向图 G 为哈密顿图，则对于 G 的顶点集 V 的任意子集 V_1，均有

$$p(G-V_1)\leqslant |V_1|$$

哈密顿图的一个充分条件　设 G 为 $n(n\geqslant 3)$ 阶无向简单图，若对 G 中任意两个不相邻顶点 u 与 v，均有 $d(u)+d(v)\geqslant n$，则 G 为哈密顿图.

平面图：

基本概念　平面嵌入、平面图、非平面图、平面图的面、有限面(内部面)、无限面(外部面)、面的边界(包围面的回路(可能是圈、简单回路、复杂回路、也可能是几个回路之并))、面的次数、极大平面图.

定理 6.5　平面图各面次数之和等于边数的 2 倍.

定理 6.6(极大平面图的性质)：

(1) 极大平面图是连通的、无割点、无桥；

(2) G 为 $n(n\geqslant 3)$ 阶连通简单平面图，G 为极大平面图当且仅当 G 的每个面的次数均为 3(也即 G 的每个面的边界均为 3 阶圈).

欧拉公式：

定理 6.7(欧拉公式)　连通平面图 G 中，阶数 n，边数 m、面数 r 满足：$n-m+r=2$；若 G 有 $k(k\geqslant 2)$ 个连通分支，则 $n-m+r=k+1$.

定理 6.8　G 为 n 阶 m 条边的连通平面图，且每个面的次数至少为 $l(l\geqslant 3)$，则

$$m\leqslant \frac{l}{l-2}(n-2)$$

平面图的判断：

相关概念　插入 2 度顶点、消去 2 度顶点、边的收缩、图的同胚.

定理 6.9(库拉图斯基定理)：

(1) 图 G 是平面图当且仅当 G 中不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图.

(2) 图 G 是平面图当且仅当 G 中没有可以收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图.

平面图的对偶图：

相关概念　平面图 G 的对偶图 G^*；G^* 的简单性质：G^* 是连通的平面图；多数情况下 G^* 是多重图；若平面图 $G_1\cong G_2$，G_1^* 与 G_2^* 不一定同构.

定理 6.10　设 G^* 是连通平面图 G 的对偶图，则

(1) $n^* = r$;

(2) $m^* = m$;

(3) $r^* = n$;

(4) 设 G^* 的顶点 v^* 在 G 的面 R_i 中,则

$$d(v^*) = \deg(R_i) \qquad i = 1,2,\cdots,r$$

着色 点着色,k-可着色,地图着色(面着色).

四色定理 任何平面图都是4-可着色的.

6.2 习 题

6.1 无向图 G 如图6.1所示.

(1) 写出 G 的顶点集 V 和边集 E,并指出 G 的阶数 n 和边数 m 各为多少.

(2) 写出各顶点的度数,并验证握手定理及握手定理的推论.

(3) 求出 G 的最大度 Δ 和最小度 δ.

(4) 指出 G 中的平行边、环、孤立点、悬挂顶点与悬挂边.

(5) 要使 G 成为简单图,至少要去掉几条边?

6.2 有向图 D 如图6.2所示.

(1) 写出 D 中各顶点的度数、出度和入度,并验证握手定理.

(2) 写出 D 的 Δ、Δ^+、Δ^-、δ、δ^+、δ^-.

(3) D 中有平行边吗?

(4) 要使 D 成为简单图,至少要去掉几条边?

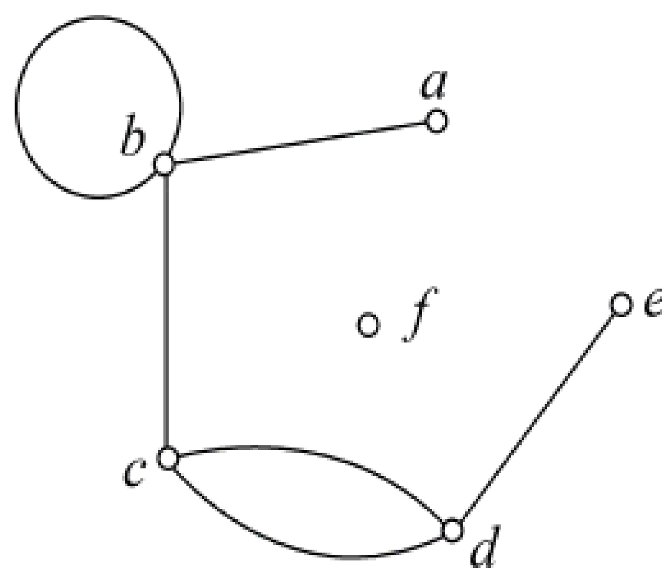


图 6.1

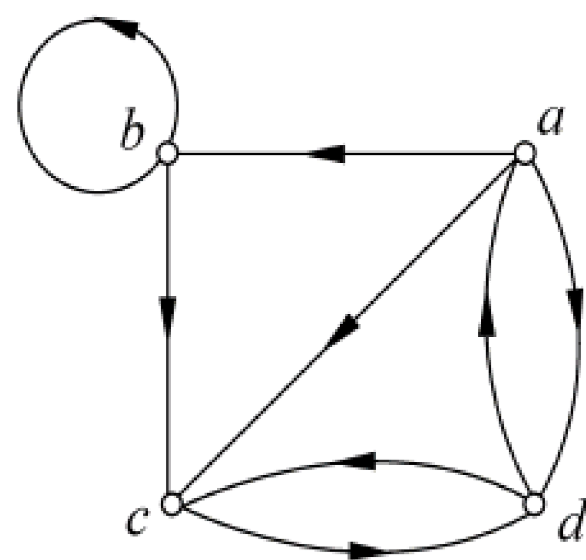


图 6.2

6.3 已知无向图 G 的边数 $m=13$,3个2度顶点,2个3度顶点,1个4度顶点,其余的顶点均为5度顶点.试求 G 中5度顶点的个数.

6.4 设无向图 G 有12条边,已知 G 中有6个3度顶点,其余顶点的度数均小于3,问 G 中至少有几个顶点?

6.5 7阶无向图中,2度,3度,4度,5度顶点的个数分别为1、3、2、1.试求 G 的边数 m.

6.6 你能画出一个7阶,每个顶点的度数都是3的无向图吗?

6.7 (1) 请画一个7阶无向图 G,使各顶点的度数分别为1、3、3、4、6、6、7.

(2) 证明不存在7阶无向简单图 G,以1、3、3、4、6、6、7为度数列.

6.8 设 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 为 n 个互不相同的正整数,证明不存在以 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 为度数列的无向简单图.

6.9　设 n 阶图 G 中有 m 条边，证明：

$$\delta(G) \leqslant \frac{2m}{n} \leqslant \Delta(G)$$

6.10　无向简单图 G_1 与 G_2 如图 6.3 所示，画出它们的补图，G_1 与 G_2 中有自补图(若图 $G \cong \overline{G}$，则称 G 为自补图)吗？

6.11　证明图 6.4 所示的两个 5 阶无向简单图 G_1 与 G_2 都是自补图.

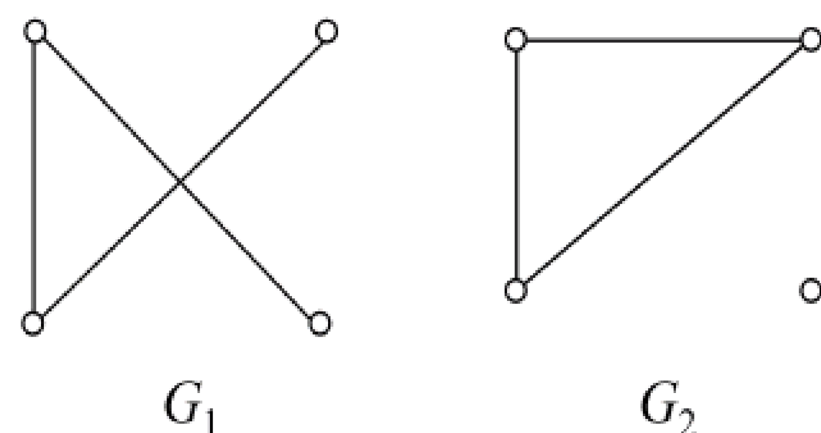


图　6.3

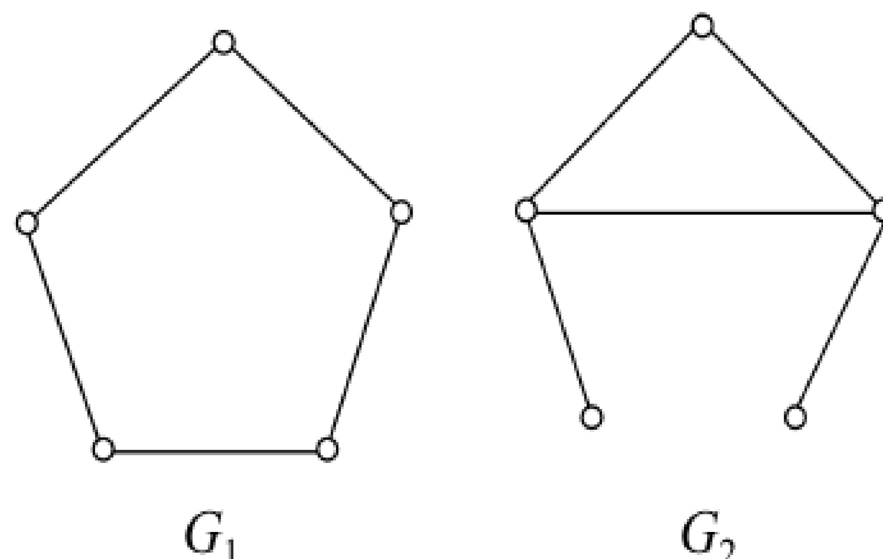


图　6.4

6.12　设 G 为 $n(n \geqslant 2)$ 阶无向简单图，证明：若 G 为自补图，则 $n=4k$ 或 $n=4k+1$，其中 k 为正整数.

6.13　设 G_1 与 G_2 都是 n 阶无向简单图，证明：$G_1 \cong G_2$ 当且仅当 $\overline{G}_1 \cong \overline{G}_2$.

6.14　已知 5 阶 3 条边的非同构的无向简单图共有 4 个，试问 5 阶 7 条边的非同构的无向简单图共有几个？

6.15　画出 K_4 的 2 条边的所有非同构的生成子图.

6.16　设 G_1、G_2、G_3 均为 4 阶 2 条边的无向简单图，证明它们中至少有两个是同构的.

6.17　3 阶有向完全图的 0、1、2、3、4、5、6 条边的非同构的生成子图各有几个？

6.18　设 G 为 $n(n \geqslant 3$ 且为奇数)阶无向简单图，证明 G 与 $\overline{G}$ 中奇度顶点个数相等.

6.19　无向图 G 如图 6.5 所示.

(1) G 中最长的圈长为几？最短的圈长为几？

(2) G 中最长的简单回路长度为几？最短的简单回路长度为几？

(3) 求出 G 的 δ、Δ、κ、λ.

6.20　有向图 D 如图 6.6 所示.

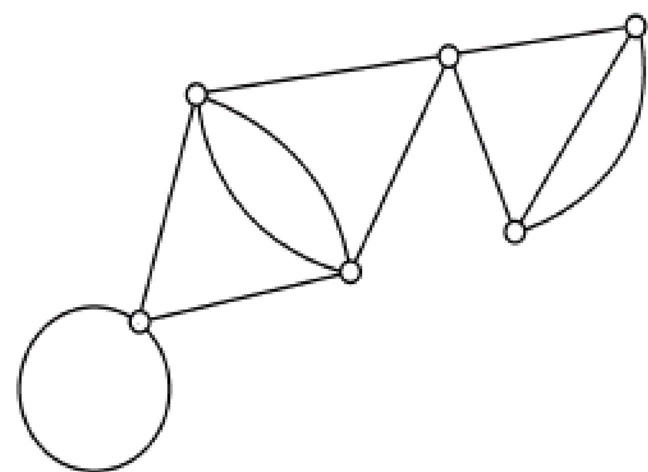


图　6.5

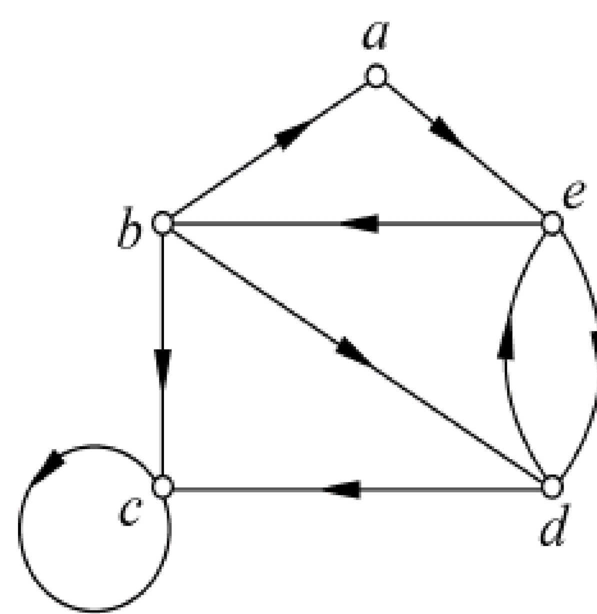


图　6.6

(1) D 中有多少条非同构的初级回路(圈)？有多少条非同构的简单回路？

(2) 求 a 到 d 的短程线和距离.

(3) 求 d 到 a 的短程线和距离.

(4) D 是哪类连通图？

6.21　设 G 为 n 阶无向简单图，若 G 不连通，证明 G 的补图 $\overline{G}$ 必连通.

6.22 6阶2-正则图有几种非同构的情况?

6.23 已知3-正则图G的阶数n与边数m满足$m=2n-3$,证明G只有两种非同构的情况.

6.24 写出图6.1的关联矩阵.

6.25 设有向图$D=\langle V,E\rangle$,其中$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$,其关联矩阵如下:

$$\boldsymbol{M}(D)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求:

(1) 各顶点的入度,出度和度数.

(2) 平行边.

6.26 有向图$D=\langle V,E\rangle$如图6.6所示.

(1) D中a到d长度分别为1、2、3、4、5的通路各有多少条?

(2) D中a到d长度小于等于3的通路有多少条?

(3) D中a到自身长度为1、2、3、4、5的回路各有多少条?

(4) D中d到自身长度小于等于3的回路有多少条?

(5) D中长度等于5的通路(不含回路)有多少条?

(6) D中长度等于5的回路有多少条?

(7) D中长度小于等于5的通路有多少条? 其中有多少条是回路?

(8) 写出D的可达矩阵.

6.27 无向图G如图6.1所示,求:

(1) a到c长度为1、2、3、4的通路数.

(2) a到自身长度为1、2、3、4的回路数.

(3) G的可达矩阵.

6.28 设无向图G中只有两个奇度顶点u和v,证明u与v必连通.

6.29 设v为无环无向图G中一条割边的一个端点,证明:v为割点当且仅当v不是悬挂顶点.

6.30 判断图6.7所示3个图中,哪些是二部图?将是二部图的画出标准形式.

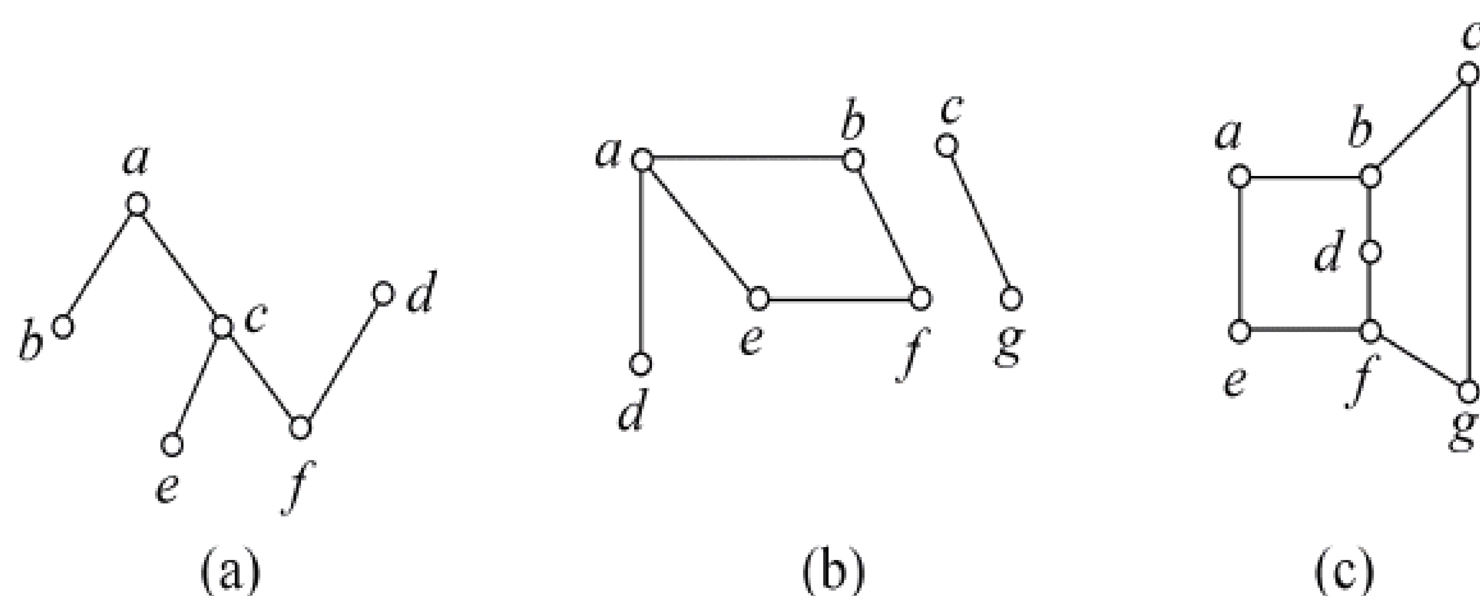


图 6.7

6.31 n为何值时,圈图C_n为二部图?

6.32 n 为何值时，K_n 为二部图？

6.33 为什么轮图 W_n 不是二部图？

6.34 今有甲、乙、丙 3 人去完成任务 a、b、c，已知甲能胜任 a,b,c，乙能胜任 a,b，丙能胜任 b,c. 做二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，其中，$V_1=\{甲,乙,丙\}$，$V_2=\{a,b,c\}$，$E=\{(u,v)\mid u\in V_1,v\in V_2$，并且 u 能胜任 $v\}$. 请画出 G 的图形，并且根据图形给出尽量多的分配任务方案，使得每个人去完成自己能胜任的一项任务.

6.35 图 6.8 中各二部图是否满足相异性条件？是否满足 t 条件？是否有完备匹配？

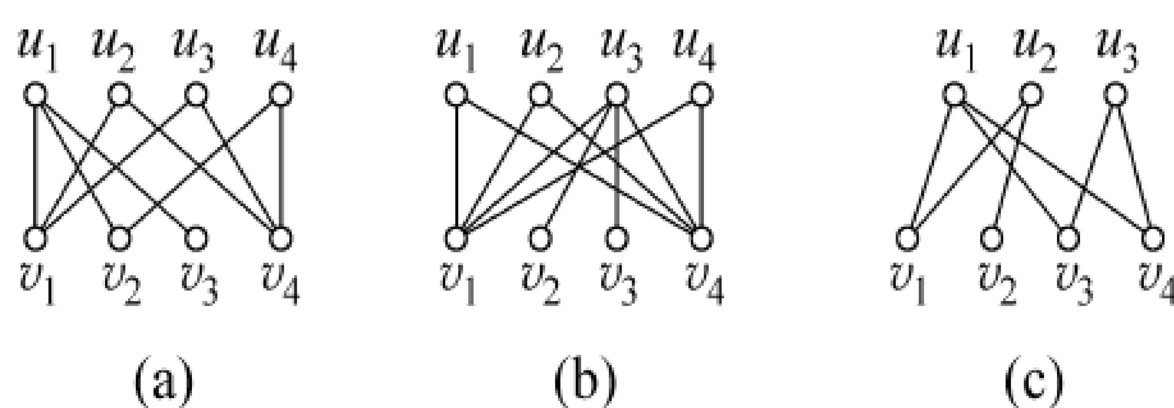


图 6.8

6.36 某公司有 6 个部门要招聘员工，限定每位应聘者至多申请 2 个部门，考核结果有 10 人符合条件. 根据这 10 人的申请，每个部门至少有 2 人申请. 问：这 6 个部门是否都能招聘到人？为什么？

6.37 有 4 名学生被录取为硕士研究生：张生、王庆、李民和赵久，有 4 位硕导：刘教授、孙教授、周教授和宋教授. 学生报考导师的情况如下：张生报考刘教授和宋教授，王庆报考孙教授和周教授，李民报考刘教授、孙教授和周教授，赵久只报考周教授. 问：4 位教授是否能恰好每人录取一名硕士研究生？

6.38 画出一些无向简单欧拉图，要求如下：

(1) 偶数个顶点，偶数条边.

(2) 奇数个顶点，奇数条边.

(3) 偶数个顶点，奇数条边.

(4) 奇数个顶点，偶数条边.

6.39 (1) 在什么条件下无向完全图 K_n 为欧拉图？

(2) 在什么条件下有向完全图为欧拉图？

(3) 在什么条件下轮图 W_n 为欧拉图？

(4) 在什么条件下完全二部图 $K_{r,s}$ 为欧拉图？

6.40 (1) 在什么条件下无向完全图 K_n 为哈密顿图？

(2) 在什么条件下有向完全图为哈密顿图？

(3) 在什么条件下 W_n 为哈密顿图？

(4) 在什么条件下 $K_{r,s}$ 为哈密顿图？

6.41 画一个简单有向图，使它

(1) 既是欧拉图，又是哈密顿图.

(2) 是欧拉图，但不是哈密顿图.

(3) 不是欧拉图，但是哈密顿图.

(4) 既不是欧拉图，也不是哈密顿图.

6.42 证明：有桥的图不是哈密顿图.

6.43 证明：有桥的图不是欧拉图.

6.44 图 6.9 中哪些有欧拉回路？哪些有欧拉通路但无欧拉回路？为什么？

6.45 图 6.10 中哪些有欧拉回路？哪些有欧拉通路但无欧拉回路？为什么？

6.46 图 6.11 中哪些有哈密顿回路？哪些有哈密顿通路但无哈密顿回路？为什么？

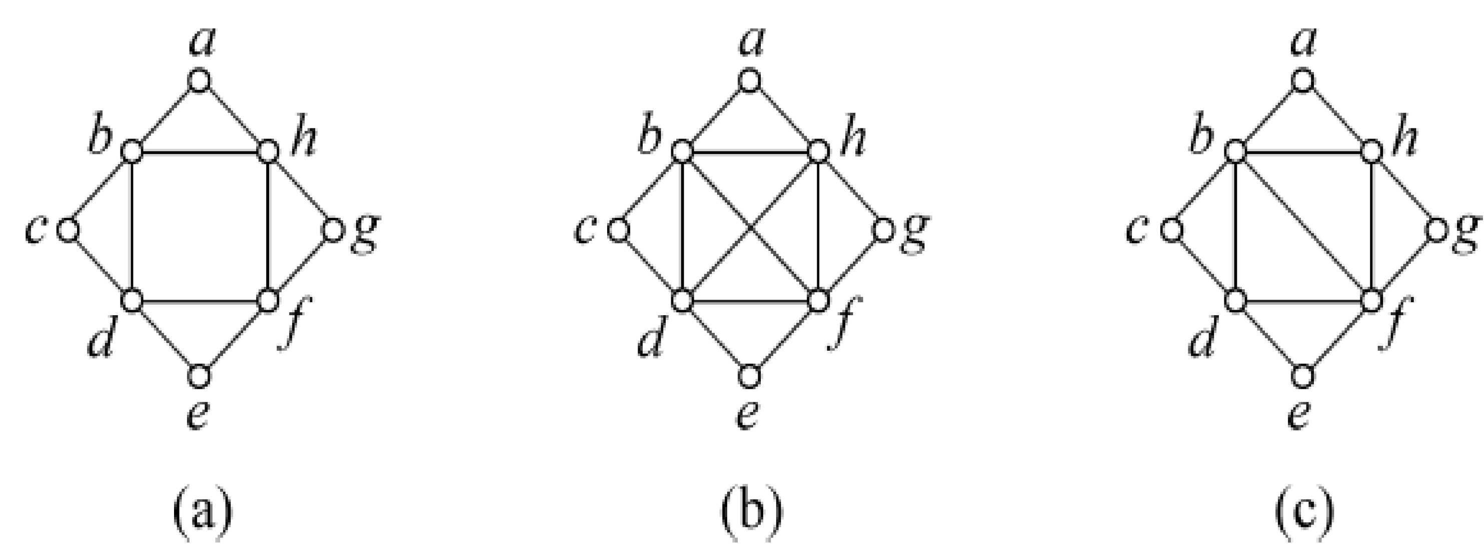


图 6.9

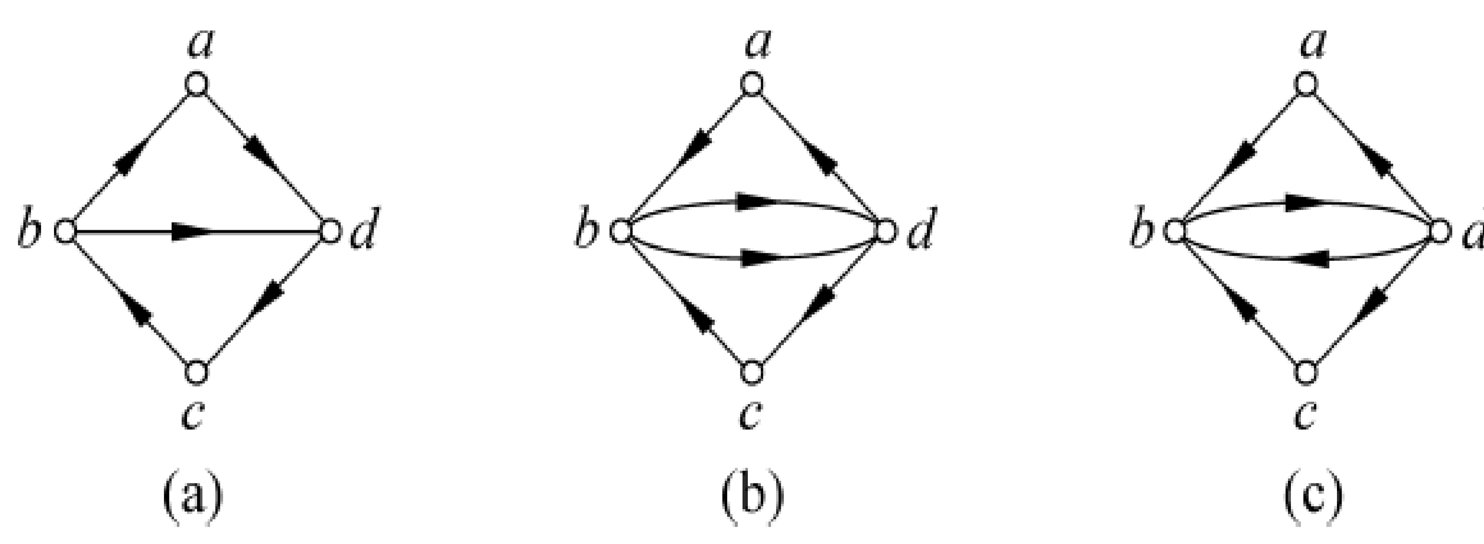


图 6.10

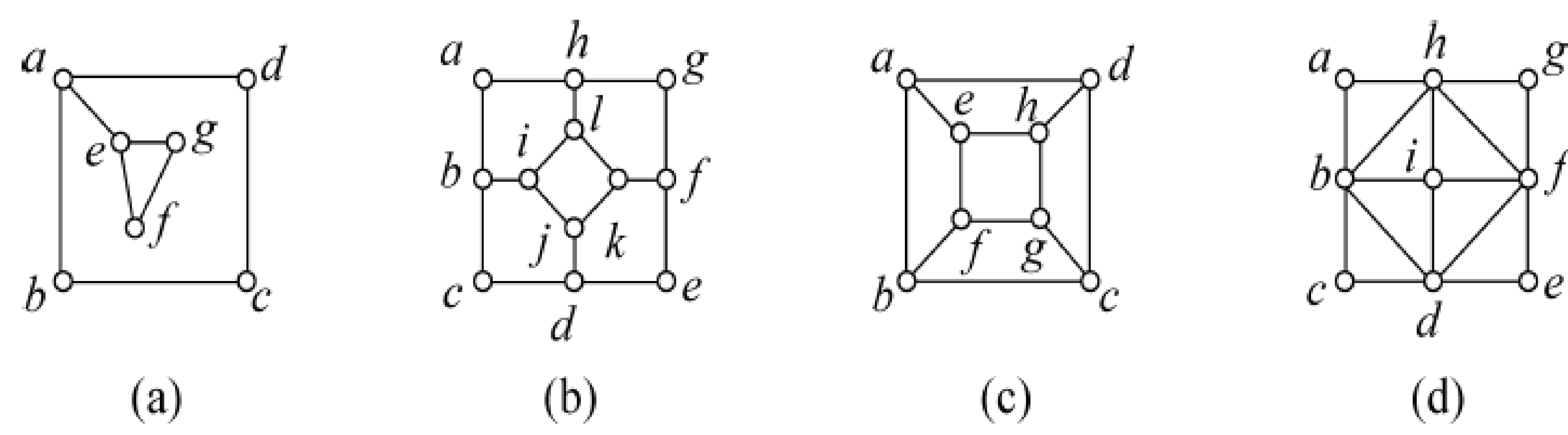


图 6.11

6.47 判断图6.12所示两个图是否为哈密顿图.

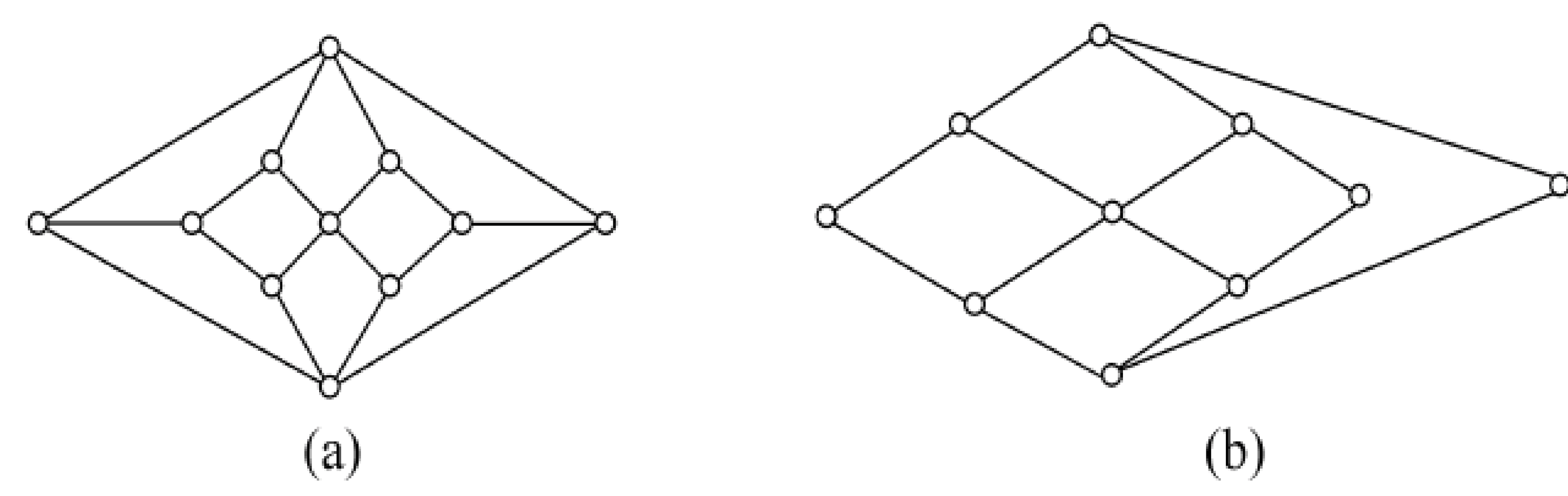


图 6.12

6.48 一名青年生活在城市 A,准备假期到郊区景点 B,C,D 去旅游,然后回到 A.图6.13给出了 A,B,C,D 的位置及它们之间的距离(公里).问该青年如何走行程最短?

6.49 某工厂生产由6种不同颜色的纱织成的双色布.已知在品种中,每种颜色至少分别和其他5种颜色中的3种颜色相搭配.证明可以挑出3种双色布,它们恰有6种不同的颜色.

6.50 求图6.14所示非连通的平面图各面的次数,并验证定理6.5(即各面次数之和等于边数的两倍).

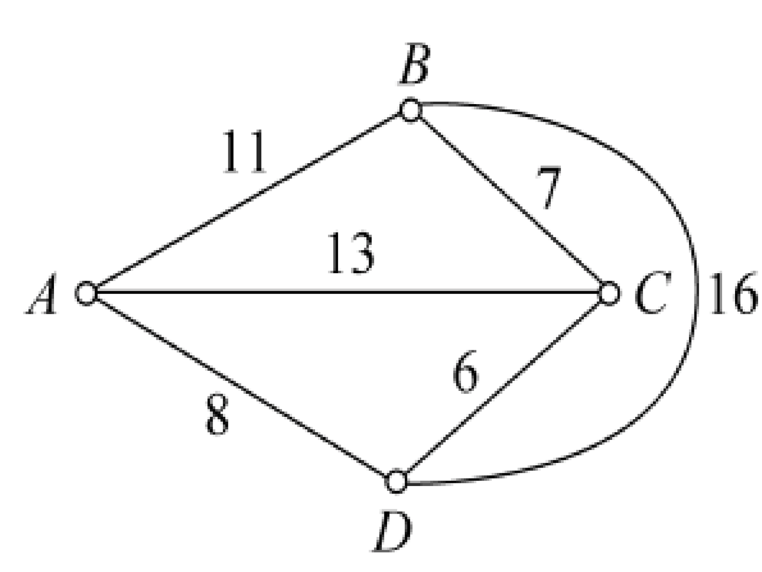


图 6.13

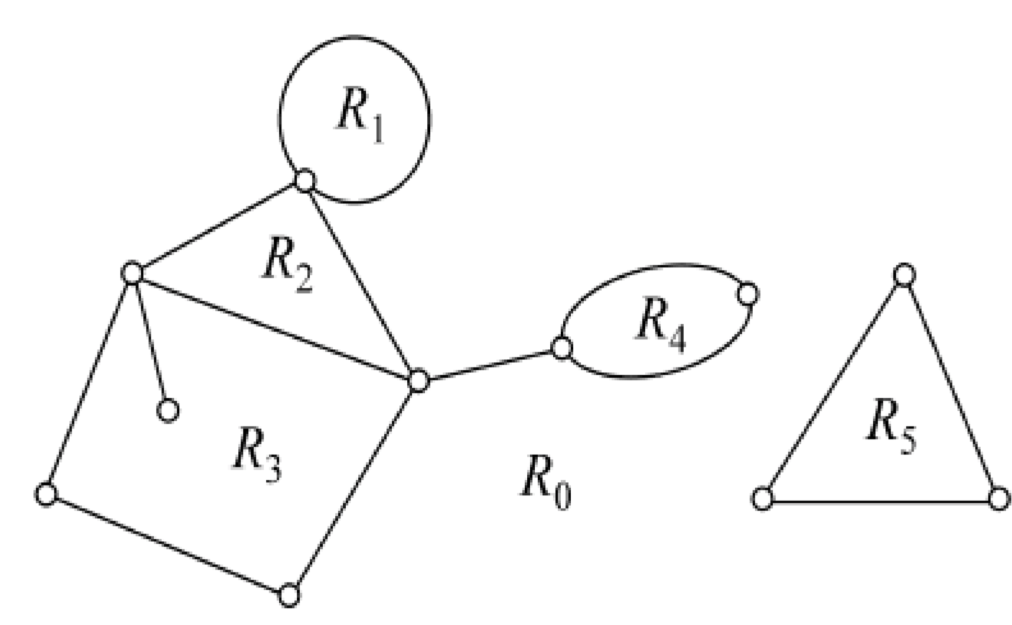


图 6.14

6.51　试将图6.15所示的平面图的内部面 R_1 变成外部面.

6.52　证明图6.16所示无向图为极大平面图.

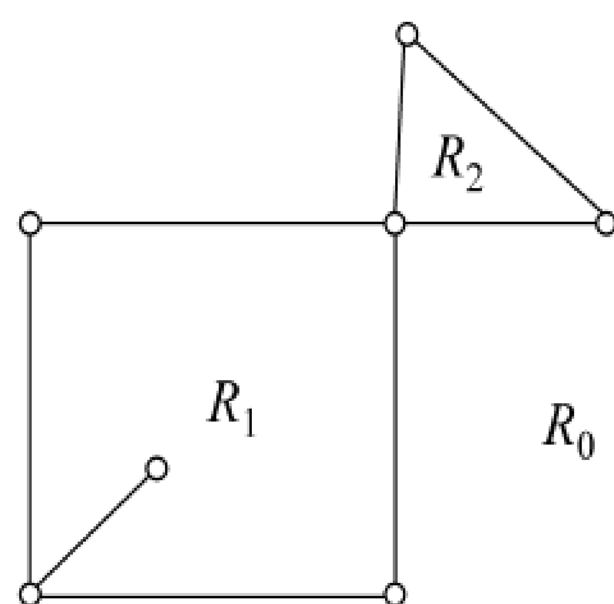


图　6.15

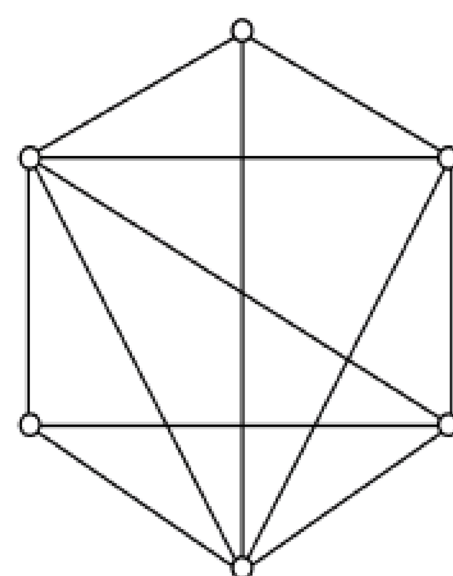


图　6.16

6.53　若 G 是一个非平面图并且任意删除一条边后都是平面图,则称 G 是**极小非平面图**.试给出两个7阶的非同构的极小非平面图.

6.54　已知7阶连通平面图 G 有6个面,试求 G 的边数 m.

6.55　已知具有3个连通分支的平面图 G 有4个面,9条边,求 G 的阶数 n.

6.56　证明图6.17所示两个图均为非平面图.

6.57　证明图6.18所示无向图为平面图.

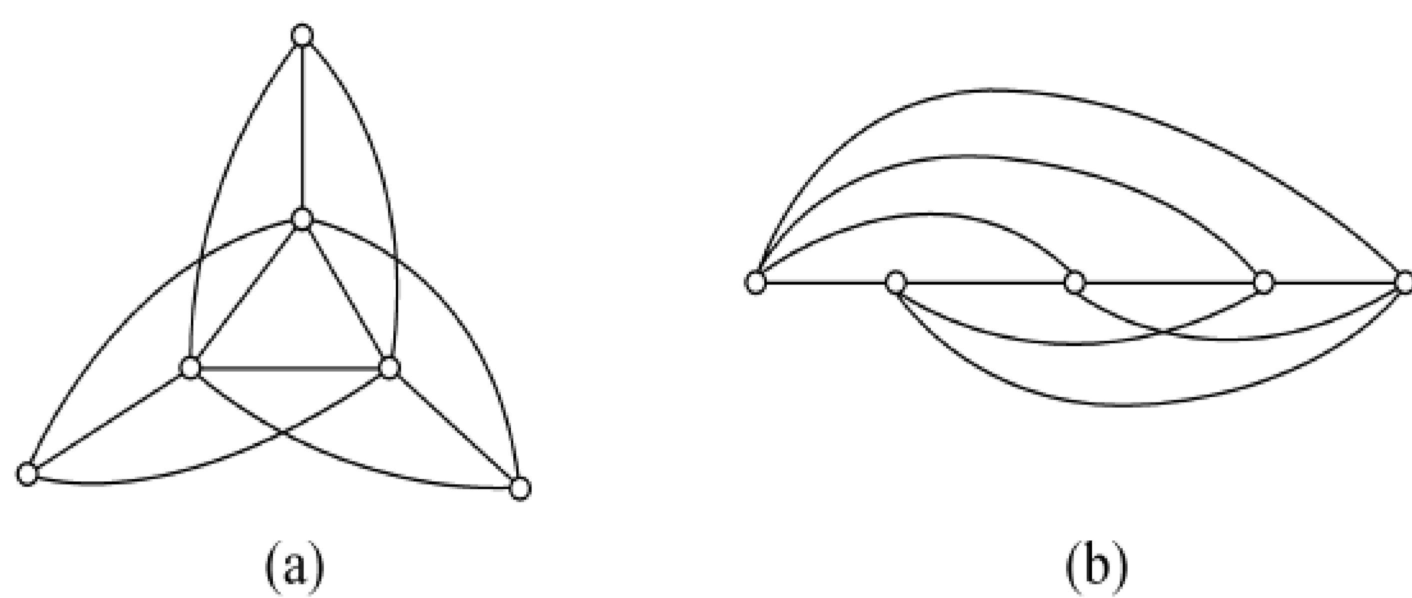


图　6.17

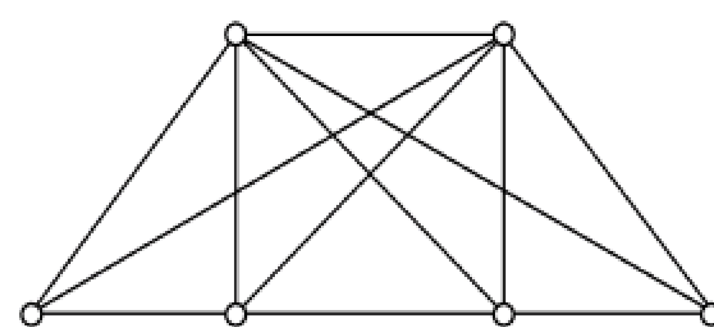


图　6.18

6.58　画出轮图 W_5 的对偶图 W_5^*,并证明 $W_5 \cong W_5^*$.

6.59　G 为 n 阶 m 条边,每个面的次数至少为4的连通的平面图,证明: $m \leqslant 2n-4$.

6.60　给下列各图的顶点着色最少要用多少种颜色?

(1) 7阶圈图 C_7.

(2) 8阶圈图 C_8.

(3) 9阶轮图 W_9.

(4) 10阶轮图 W_{10}.

(5) n 阶完全图 K_n.

(6) 二部图 $K_{s,t}$.

6.61　给图6.11中各图用尽量少的颜色着色.

6.62　某大学计算机专业三年级有5门选修课,其中课程1与2,1与3,1与4,2与4,2与5,3与4,3与5均有人同时选修.问:安排这5门课的考试至少需要几个时间段?

6.63　假设当两台无线发射设备的距离小于200公里时不能使用相同的频率. 现有6台设备,表6.1给出它们之间的距离,问:它们至少需要几个不同的频率?

表 6.1

	1	2	3	4	5	6
1	0	120	250	345	160	180
2		0	125	240	150	210
3			0	160	320	380
4				0	288	321
5					0	100
6						0

6.64 有6名博士生要进行论文答辩,答辩委员会的成员分别为 $A_1=\{$张教授,李教授,王教授$\}$,$A_2=\{$李教授,赵教授,刘教授$\}$,$A_3=\{$张教授,刘教授,王教授$\}$,$A_4=\{$赵教授,刘教授,王教授$\}$,$A_5=\{$张教授,李教授,孙教授$\}$,$A_6=\{$李教授,刘教授,王教授$\}$,那么这次论文答辩必须安排在多少个不同的时间?

6.3 习题解答与分析

6.1 设图6.1所示无向图为 $G=\langle V,E\rangle$.

(1) $V=\{a,b,c,d,e,f\}$. E 中元素有两种表示法.

① 定义意义下:$E=\{(a,b),(b,b),(b,c),(c,d),(c,d),(d,e)\}$.

② 令 $e_1=(a,b)$,$e_2=(b,b)$,$e_3=(b,c)$,$e_4=(c,d)$,$e_5=(c,d)$,$e_6=(d,e)$,则 $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$.

G 的阶数 $n=|V|=6$,G 的边数 $m=|E|=6$.

(2) $d(a)=1$,$d(b)=4$,$d(c)=3$,$d(d)=3$,$d(e)=1$,$d(f)=0$. 各顶点度数之和为12,它正是边数 $m(=6)$ 的两倍. 奇度数顶点为4个(为偶数).

(3) 按字母顺序,得 G 的度数列为1、4、3、3、1、0,其中最大度 $\Delta=4$,在 b 点达到,最小度 $\delta=0$,在 f 点达到.

(4) 顶点 c,d 之间有两条平行边(e_4 与 e_5),顶点 b 处有一个环(e_2),f 为孤立点,a、e 均为悬挂点,它们关联的边 e_1 与 e_6 为悬挂边.

(5) 要使 G 成为简单图,至少要去掉2条边. 在这里,e_2 一定去掉,e_4 与 e_5 中至少要去1条.

6.2 设图6.2所示有向图为 $D=\langle V,E\rangle$.

(1) $V=\{a,b,c,d\}$,$E=\{\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,a\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,c\rangle\}$,也可表示为 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_8\}$. 其中,$e_1=\langle a,b\rangle$,$e_2=\langle b,b\rangle$,$e_3=\langle b,c\rangle$,$e_4=\langle c,d\rangle$,$e_5=\langle d,c\rangle$,$e_6=\langle d,a\rangle$,$e_7=\langle a,d\rangle$,$e_8=\langle a,c\rangle$.

各顶点的度数、出度、入度分别为

$$d(a)=4,\quad d^+(a)=3,\quad d^-(a)=1$$
$$d(b)=4,\quad d^+(b)=2,\quad d^-(b)=2$$
$$d(c)=4,\quad d^+(c)=1,\quad d^-(c)=3$$
$$d(d)=4,\quad d^+(d)=2,\quad d^-(d)=2$$

易知,各顶点的度数之和为16,它等于边数 $m(=8)$ 的两倍,且各顶点入度之和与出度之和

均为边数 m.

(2) 从(1)中结果可以看出：

D 的最大度与最小度相等，即 $\Delta=\delta=4$，在 a,b,c,d 顶点处达到.

D 的最大出度 $\Delta^{+}=3$，在 a 点处达到.

D 的最小出度 $\delta^{+}=1$，在 c 点处达到.

D 的最大入度 $\Delta^{-}=3$，在 c 点处达到.

D 的最小入度 $\delta^{-}=1$，在 a 点处达到.

(3) D 中无平行边，注意 $\langle c,d\rangle$ 与 $\langle d,c\rangle$ 不是平行边，同样地，$\langle a,d\rangle$ 与 $\langle d,a\rangle$ 也不是平行边.

(4) 要使 D 成为简单图，至少去掉 1 条边，此边为环 $\langle b,b\rangle$.

6.3 G 中有 2 个 5 度顶点.

分析 用握手定理解本题. 设 5 度顶点有 x 个，由握手定理可知：

$$2m=26=2\times 3+3\times 2+4\times 1+5x$$
$$=16+5x$$

可解出 $x=2$，即 G 中有 2 个 5 度顶点. 可设 G 的度数列为 $\boldsymbol{d}$，则 $\boldsymbol{d}$ 为

$$2,2,2,3,3,4,5,5$$

以 $\boldsymbol{d}$ 为度数列的无向图有许多种非同构的情况，在图 6.19 中给出的两个图都以 $\boldsymbol{d}$ 为度数列，它们是非同构的.

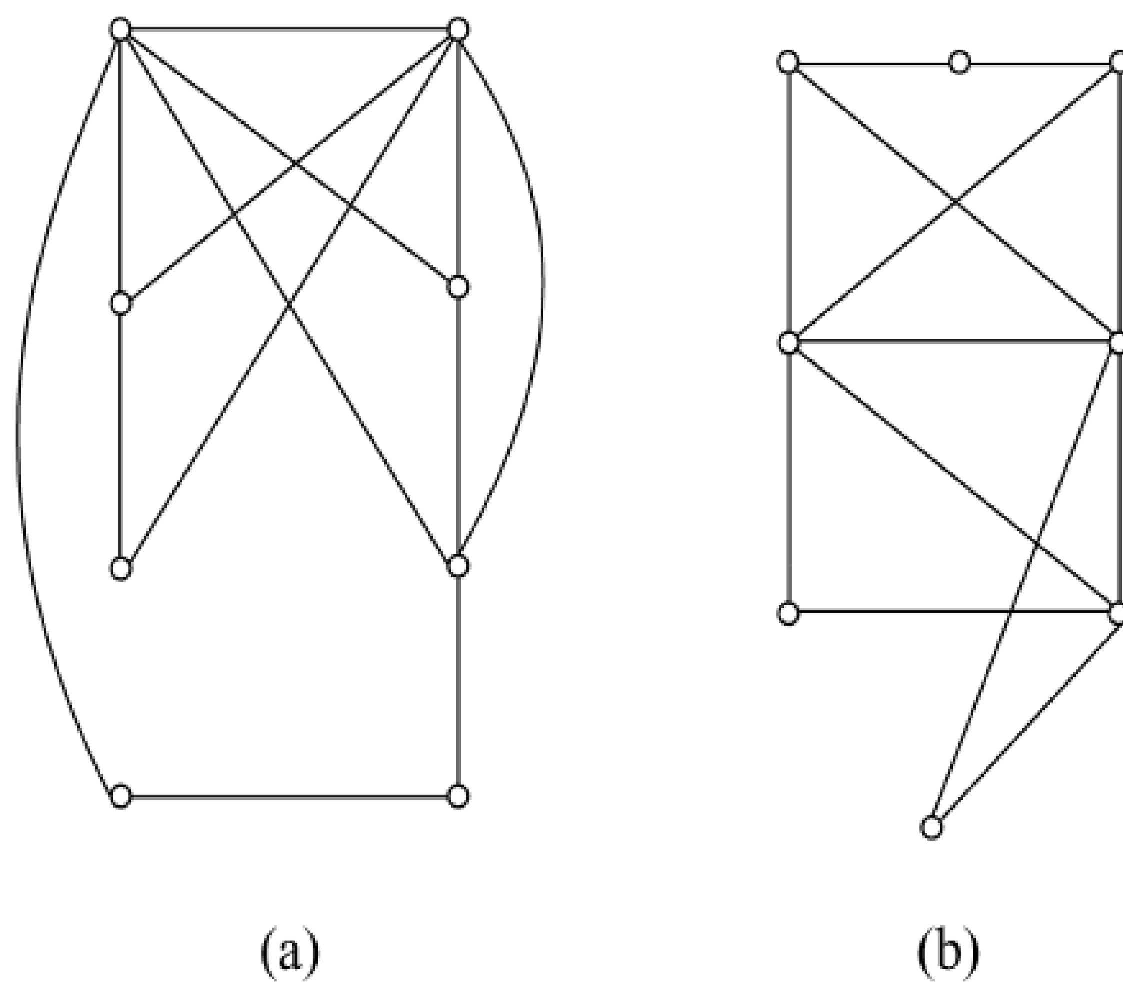


图 6.19

6.4 G 中至少有 9 个顶点.

分析 用握手定理解本题. 设 G 有 n 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，不妨设 $d(v_1)=d(v_2)=\cdots=d(v_6)=3$，而 $d(v_7),\cdots,d(v_n)$ 均小于等于 2. 由握手定理可知：

$$2m=24=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)=3\times 6+\sum_{i=7}^{n}d(v_i)\leqslant 18+2\times(n-6)$$

$$\Rightarrow 6\leqslant 2\times(n-6)=2n-12$$

$$\Rightarrow n\geqslant 9$$

6.5 边数 $m=12$.

解答与分析 设 7 阶无向图 G 的边数为 m. 由握手定理可知：

$$2m=\sum_{i=1}^{7}d(v_i)=2\times 1+3\times 3+4\times 2+5\times 1=24$$

$$\Rightarrow m=12$$

7 阶 12 条边的无向图 G 的度数列 $\boldsymbol{d}$ 为

$$2,3,3,3,4,4,5$$

以 $\boldsymbol{d}$ 为度数列的 7 阶图，也有许多非同构的情况，图 6.20(a)、(b)所示的 7 阶简单图均以 $\boldsymbol{d}$ 为度数列，它们是非同构的.

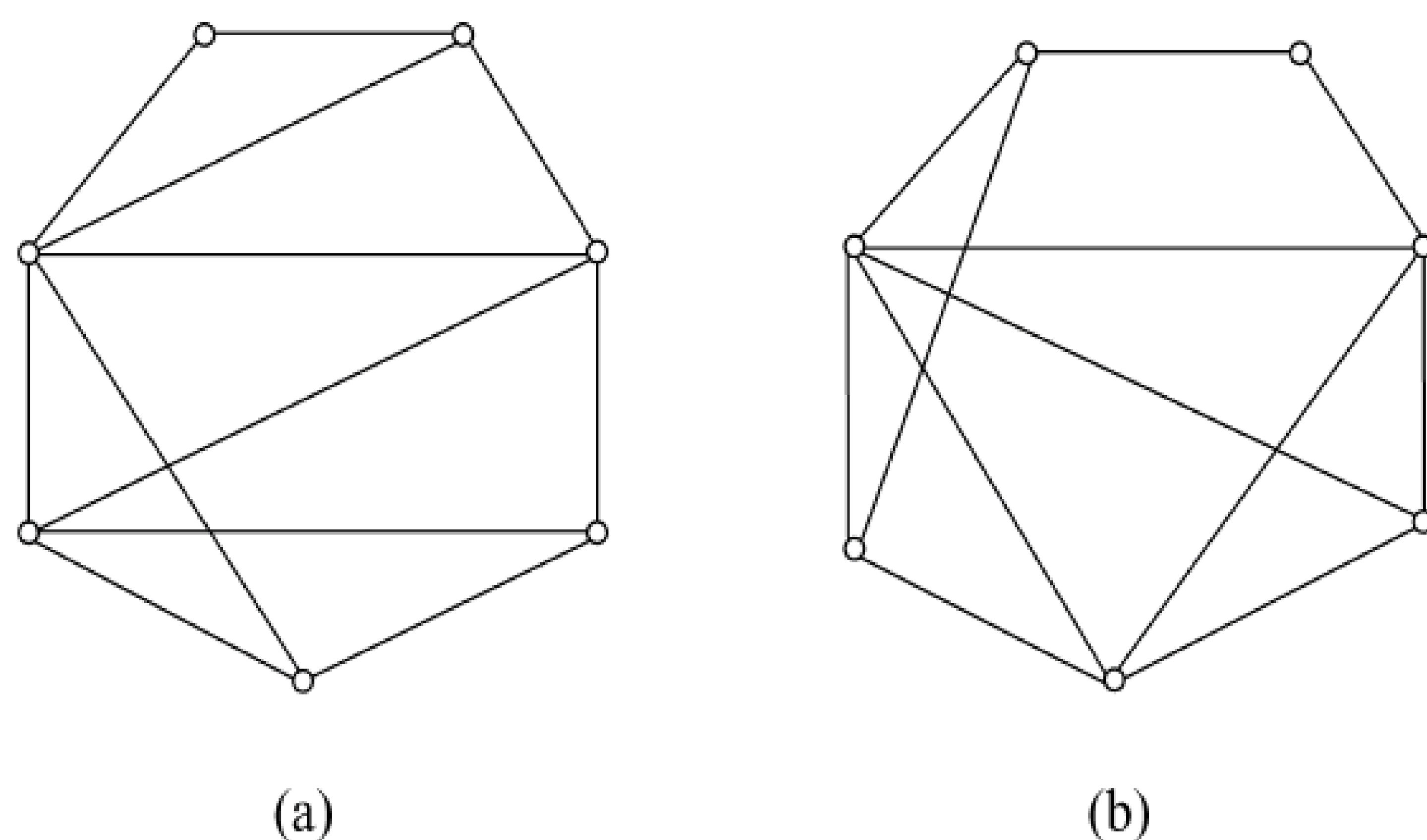


图 6.20

6.6 根据握手定理的推论,不能画出一个7阶且每个顶点的度数都是3的无向图.

6.7 (1) 图6.21(a)和(b)两个非同构的图都满足要求.

(2) 用归谬法(即反证法)证明之.

假设存在7阶无向简单图 G,以1,3,3,4,6,6,7为度数列,则 $\Delta(G)=7$,这与 n 阶无向简单图的最大度 $\Delta\leqslant n-1$ 相矛盾.

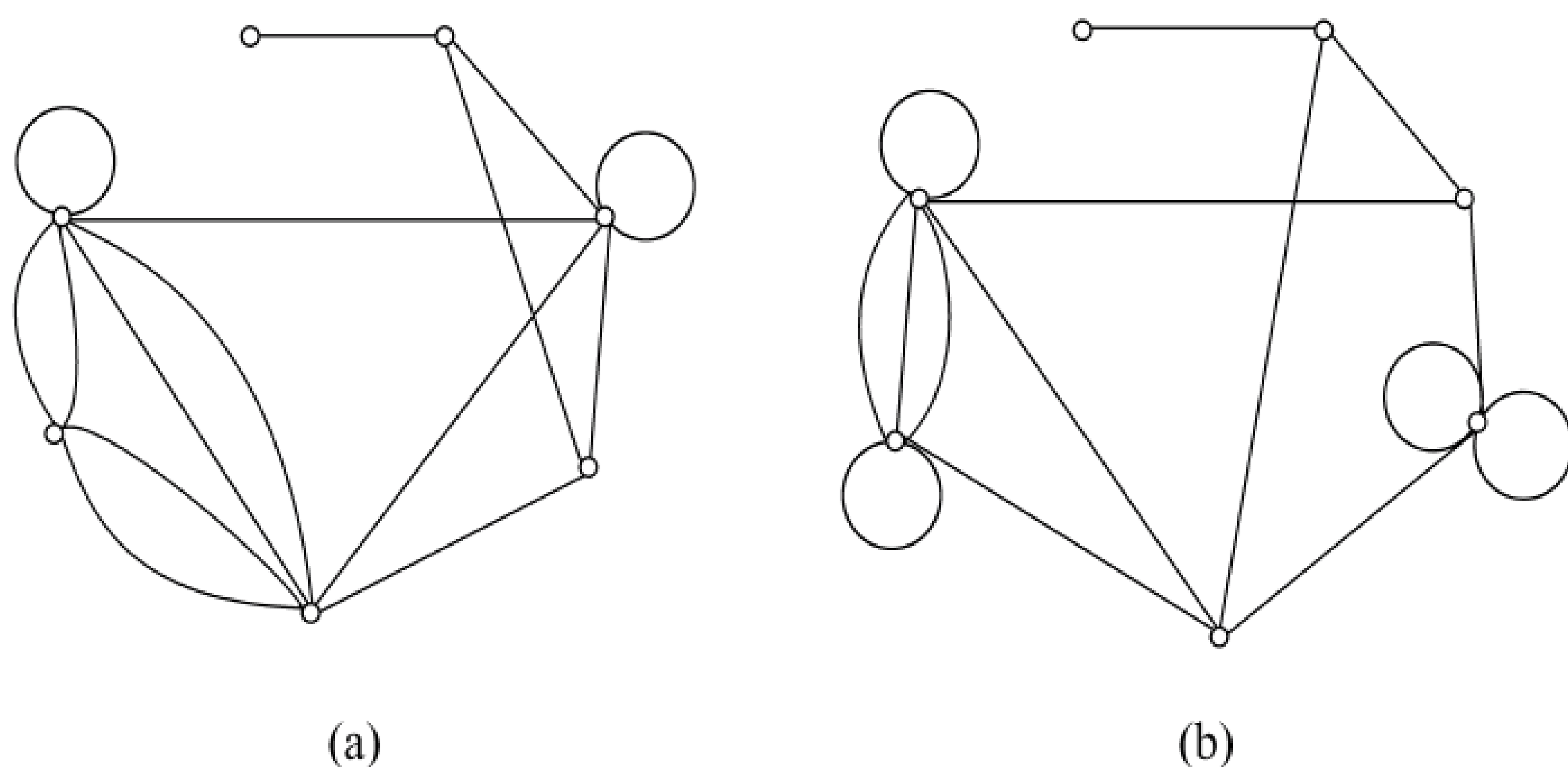


图 6.21

6.8 利用 n 阶无向简单图 G 的最大度 $\Delta(G)\leqslant n-1$ 证明本题.

用归谬法证明.假设存在以 $d_1,d_2,\cdots,d_n$($d_1,d_2,\cdots,d_n$ 为 n 个互不相同的正整数)为度数列的无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,不妨设 $d(v_i)=d_i$,$i=1,2,\cdots,n$,则

$$\begin{aligned}\Delta(G)&=\max\{d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_n)\}\\&=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}\geqslant n\end{aligned}$$

这与 n 阶无向简单图的最大度应该 $\leqslant n-1$ 相矛盾.

6.9 用握手定理以及图的最大度与最小度的概念证明本题.

设 G 的顶点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,易知

$$n\delta(G)\leqslant\sum_{i=1}^{n}d(v_i)\leqslant n\Delta(G)$$

从而有

$$\delta(G)\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}d(v_i)}{n}\leqslant\Delta(G)$$

由握手定理可知,$2m=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)$,于是有

$$\delta(G) \leqslant \frac{2m}{n} \leqslant \Delta(G)$$

其实,由握手定理可知,$\frac{2m}{n}$是G的各顶点度数的平均值,因而必有

$$\delta(G) \leqslant \frac{2m}{n} \leqslant \Delta(G)$$

6.10　图6.3中G_1的补图$\bar{G}_1$为图6.22(a)所示,G_1与$\bar{G}_1$都是4阶长度为3的路径,所以$G_1 \cong \bar{G}_1$,因此G_1是自补图(当然$\bar{G}_1$也是自补图).

图6.3中G_2的补图$\bar{G}_2$为图6.22(b)所示,G_2是4阶非连通图,而它的补图$\bar{G}_2$是4阶连通图,当然必有$G_2 \ncong \bar{G}_2$,所以G_2不是自补图.

6.11　图6.23(a)所示的图为图6.4中G_1的补图$\bar{G}_1$,G_1与$\bar{G}_1$都是5阶圈,因而$G_1 \cong \bar{G}_1$,故$G_1(\bar{G}_1)$为自补图.

图6.23(b)所示的图为图6.4中G_2的补图$\bar{G}_2$,G_2与$\bar{G}_2$都是由一个K_3带着两条悬挂边构成的5阶无向简单图,$G_2 \cong \bar{G}_2$,所以$G_2(\bar{G}_2)$为自补图.

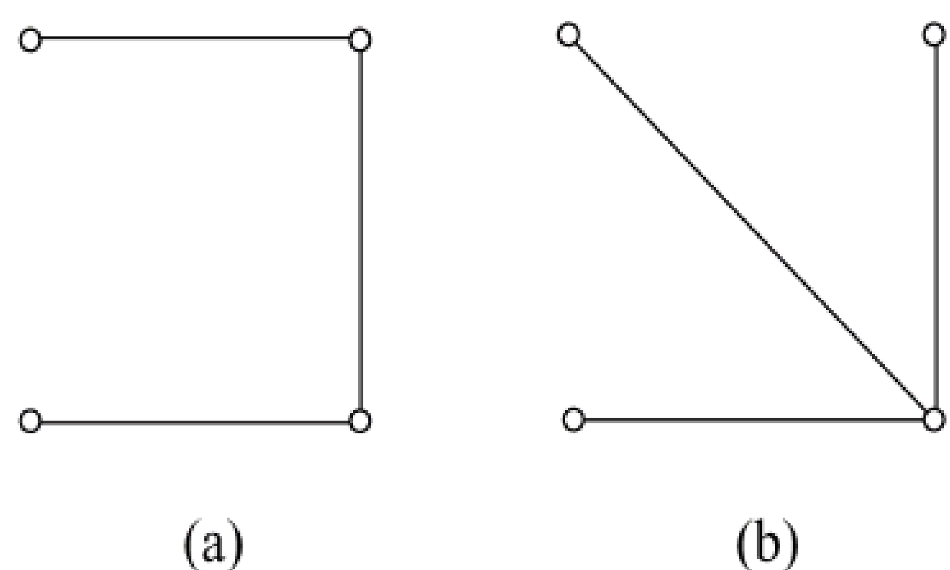


图　6.22

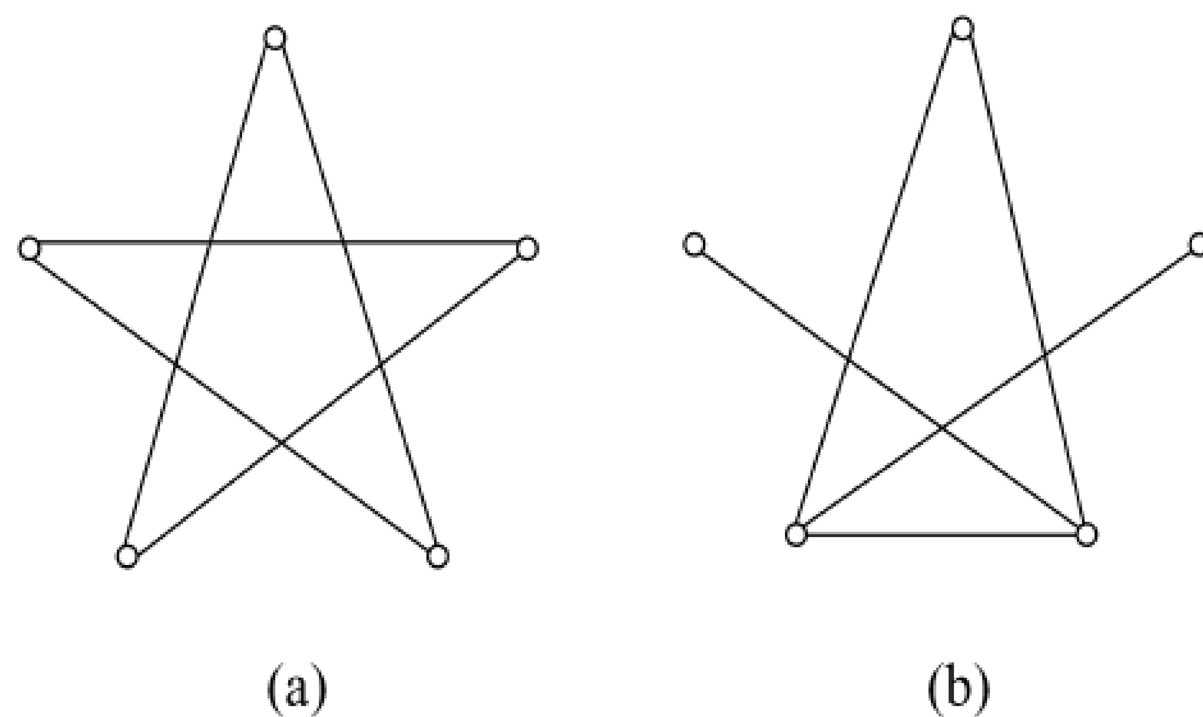


图　6.23

6.12　本题分下面几步证明(使用直接证明法).

(1) 由补图的定义可知

$$G \cup \bar{G} = K_n \quad (n\text{为}G\text{的阶数})$$

设G与$\bar{G}$的边数分别为m_1和m_2,则

$$m_1 + m_2 = n(n-1)/2 \quad (K_n\text{的边数})$$

(2) 由于G为自补图,所以$G \cong \bar{G}$,因而$m_1 = m_2$,记$m_1 = m_2 = m$.于是有

$$m_1 + m_2 = 2m = n(n-1)/2$$

$$\Rightarrow m = n(n-1)/4$$

(3) 由于n与$(n-1)$是连续的自然数,所以n与$(n-1)$互素,又因为m是整数,必有下面两种情况:

情况1　$n=4k(k \geqslant 1)$,例如6.10题中,图6.3中的G_1为自补图,$n=4(k=1$的情况).

情况2　$n-1=4k$,即$n=4k+1(k \geqslant 1)$.例如6.11题中,图6.4中G_1为自补图,$n=5$(是$k=1$的情况).

注意　若G是n阶自补图,则$n=4k$或$n=4k+1$是必要条件,而不是G为自补图的充分条件,图6.3中的G_2满足$n=4k$的条件,但不是自补图.

6.13　用图同构及补图的定义证明本题.

证明:若$G_1 \cong G_2$,则$\bar{G}_1 \cong \bar{G}_2$.

设 $V(G_1)=V(\overline{G}_1)=V_1$，$V(G_2)=V(\overline{G}_2)=V_2$，再令 $E(G_1)$、$E(\overline{G}_1)$、$E(G_2)$、$E(\overline{G}_2)$ 分别为 G_1、$\overline{G}_1$、G_2、$\overline{G}_2$ 的边集.

因为 $G_1\cong G_2$，所以存在双射函数 $f: V_1\to V_2$，使得 $\forall u,v\in V_1$，$(u,v)\in E(G_1)\Leftrightarrow(f(u),f(v))\in E(G_2)$. 于是，对此 f，必有 $(u,v)\notin E(G_1)\Leftrightarrow(f(u),f(v))\notin E(G_2)$，这又蕴涵着：$(u,v)\in E(\overline{G}_1)\Leftrightarrow(f(u),f(v))\in E(\overline{G}_2)$，从而可知，$\overline{G}_1\cong\overline{G}_2$.

类似可证明，若 $\overline{G}_1\cong\overline{G}_2$，则 $G_1\cong G_2$.

从以上的证明过程可知，设 G_1 与 G_2 都是 n 阶无向简单图，则 $G_1\not\cong G_2$ 当且仅当 $\overline{G}_1\not\cong\overline{G}_2$.

6.14　已知5阶3条边的非同构的无向简单图共有4个，则5阶7条边的非同构的无向简单图也共有4个.

分析　若 G 是 n 阶 m 条边的无向简单图，则 G 的补图 $\overline{G}$ 是 n 阶 $n(n-1)/2-m$ 条边的无向简单图. 当 $n=5$，$m=3$ 时，则 $\overline{G}$ 是5阶7条边的无向简单图.

由上题(题6.13)的讨论可知，$G_1\cong G_2$ 当且仅当 $\overline{G}_1\cong\overline{G}_2$（$G_1\not\cong G_2$ 当且仅当 $\overline{G}_1\not\cong\overline{G}_2$）. 设5阶3条边的4个非同构的无向简单图分别为 G_1、G_2、G_3、G_4，它们的补图分别为 $\overline{G}_1$、$\overline{G}_2$、$\overline{G}_3$、$\overline{G}_4$ 也彼此分别不同构，并且5阶7条边的非同构的无向简单也只有以上4个.

若能找出5阶3条边的4个非同构的无向简单图，根据补图的定义，马上可找出它们的补图，这比直接找5阶7条边所有非同构的简单图要方便得多.

下面给出通过画出5阶3条边所有非同构的无向简单图，画出5阶7条边的所有非同构的无向简单图的过程.

(1) 5阶3条边所有的无向简单图都是 K_5 的子图. 3条边共产生6度(握手定理)，将6度分配给5个顶点，按简单图的要求共有4种分配方案：

① 1,1,1,1,2；

② 0,1,1,2,2；

③ 0,1,1,1,3；

④ 0,0,2,2,2.

每种方案产生一个非同构的5阶3条边的简单图，而4个图是彼此非同构的，所产生的4个图由图6.24(a)、(b)、(c)、(d)所示.

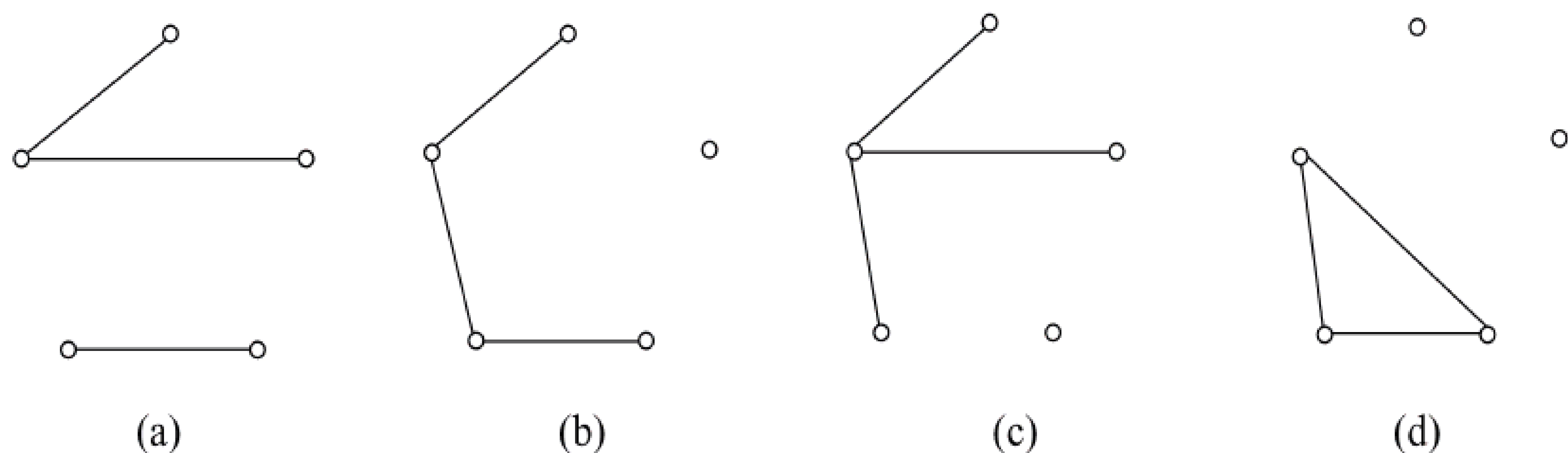


图　6.24

(2) 4个5阶7条边的非同构的无向简单图分别为图6.24中各图的补图，见图6.25中各图所示.

6.15　K_4 的两条边的非同构的生成子图共有2个. 由握手定理可知，两条边共产生

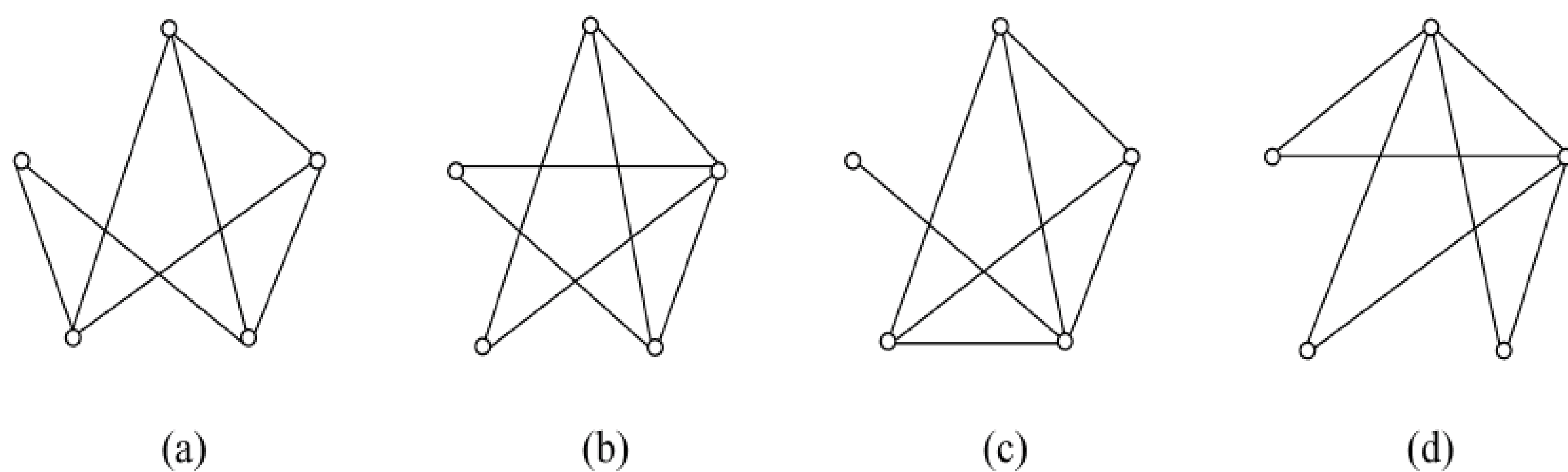


图 6.25

4 度,分配给 4 个顶点,其分配方案为

① 1,1,1,1;

② 0,1,1,2.

它们对应的生成子图为图 6.26(a)和(b)所示.

(a) (b)

图 6.26

6.16 利用 6.15 题和鸽巢原理解此题.形象地说,鸽巢原理为:m 只鸽子飞入 n 个鸽巢,则至少存在一个鸽巢至少飞入$\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$只鸽子.关于$\lceil x \rceil$见主教材 1.1.2 节.例如,当 $m=5,n=2$ 时,则至少有$\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil=3$ 只鸽子飞入同一个鸽巢.当 $m=8,n=5$ 时,则至少有$\left\lceil \frac{8}{5} \right\rceil=2$ 只鸽子飞入同一个鸽巢.下面证明本题.

4 阶无向简单图,在同构意义下都是 K_4 的生成子图.由上题(题 6.15)可知,K_4 的 2 条边的生成子图只有两个是非同构的.G_1、G_2、G_3 都是 4 阶 2 条边的无向简单图,在同构意义下,它们都是 K_4 的生成子图,由鸽巢原理可知,G_1、G_2、G_3 中至少有两个是同构的.

在有些问题中,灵活地应用鸽巢原理,会带来很大的方便.

6.17 3 阶有向完全图的 0、1、2、3、4、5、6 条边的非同构的生成子图的个数分别为 1、1、4、4、4、1、1.在图 6.27 中分别给出了它们的图形.0 条边、1 条边、5 条边、6 条边的分别由图 6.27(a)、(b)、(c)、(d)所示;2 条边的 4 个图分别由图 6.27(e)、(f)、(g)、(h)所示;3 条边的 4 个图分别由图 6.27(i)、(j)、(k)、(l)所示;4 条边的 4 个图分别由图 6.27(m)、(n)、(o)、(p)所示.

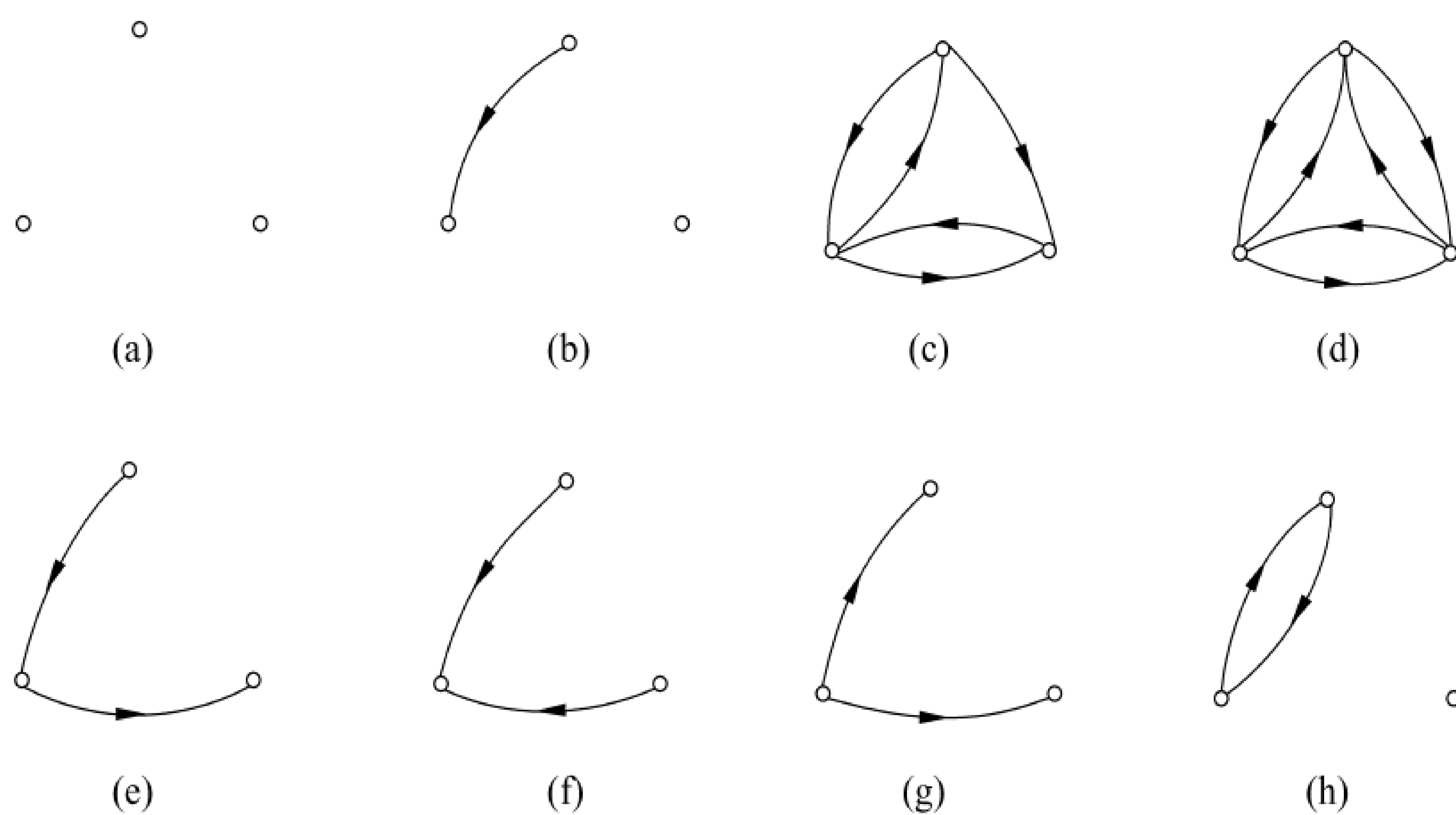


图 6.27

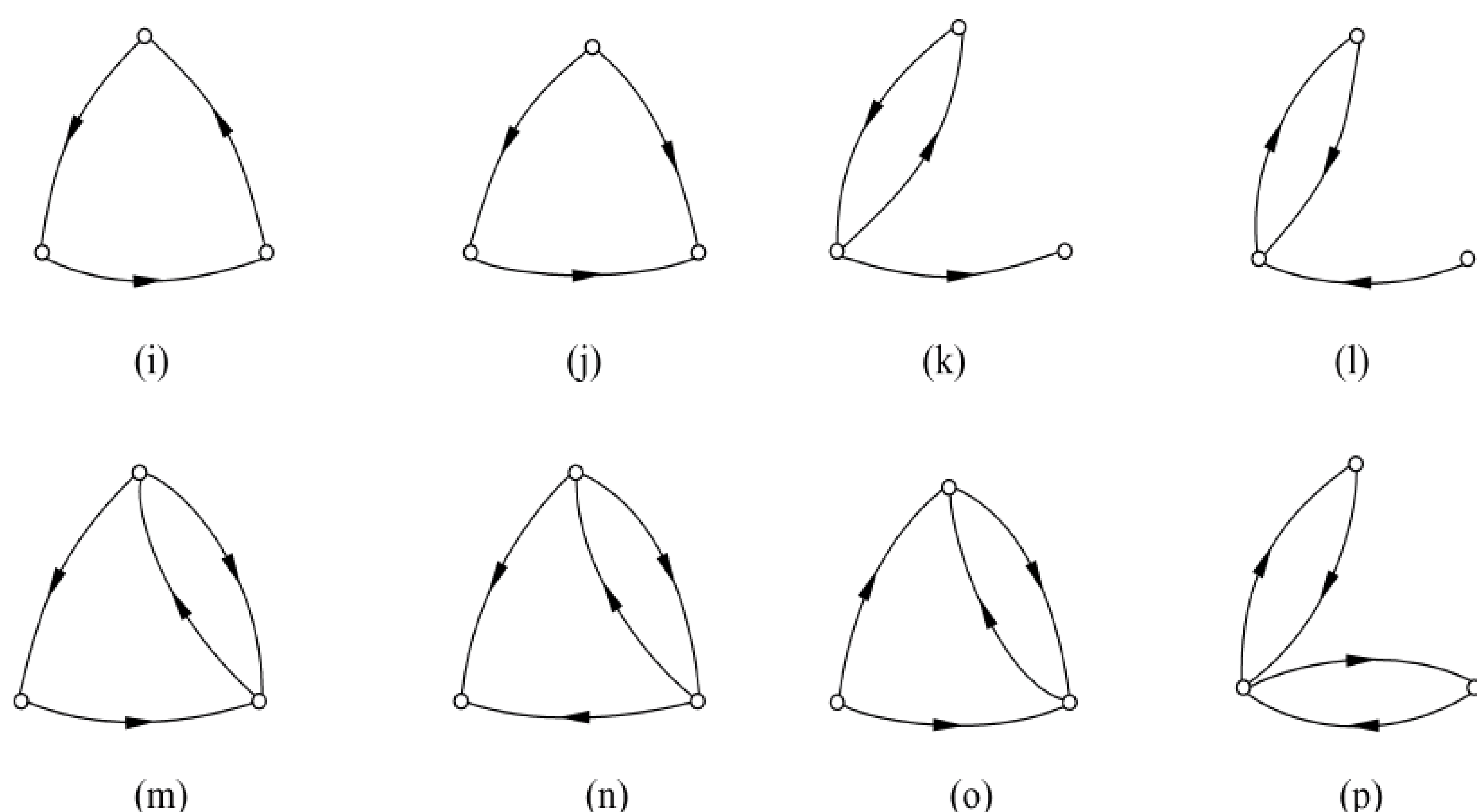


图 6.27(续)

6.18 利用 n 阶无向简单图 G,G 的补图 $\overline{G}$,无向完全图 K_n 的性质及相互之间的关系证明本题.

设 $G,\overline{G},K_n$ 的顶点集分别为 $V(G),V(\overline{G}),V(K_n)$,由 $G,\overline{G},K_n$ 之间的关系可知,$V(G)=V(\overline{G})=V(K_n)$,并记它们都等于 V. $\forall v\in V$,记 v 在 $G,\overline{G},K_n$ 中的度数分别为 $d_G(v),d_{\overline{G}}(v),d_{K_n}(v)$,则必有

$$d_G(v)+d_{\overline{G}}(v)=d_{K_n}(v)=n-1$$

由于 n 为奇数,所以 $n-1$ 为偶数,因而,若 $d_G(v)$为奇数,必有 $d_{\overline{G}}(v)$为奇数,于是 G 与 $\overline{G}$ 中奇度顶点个数必相等.

6.19 为了回答本题中的问题,将图 6.5 的顶点和边标定,使其成为标定图,见图 6.28 所示.

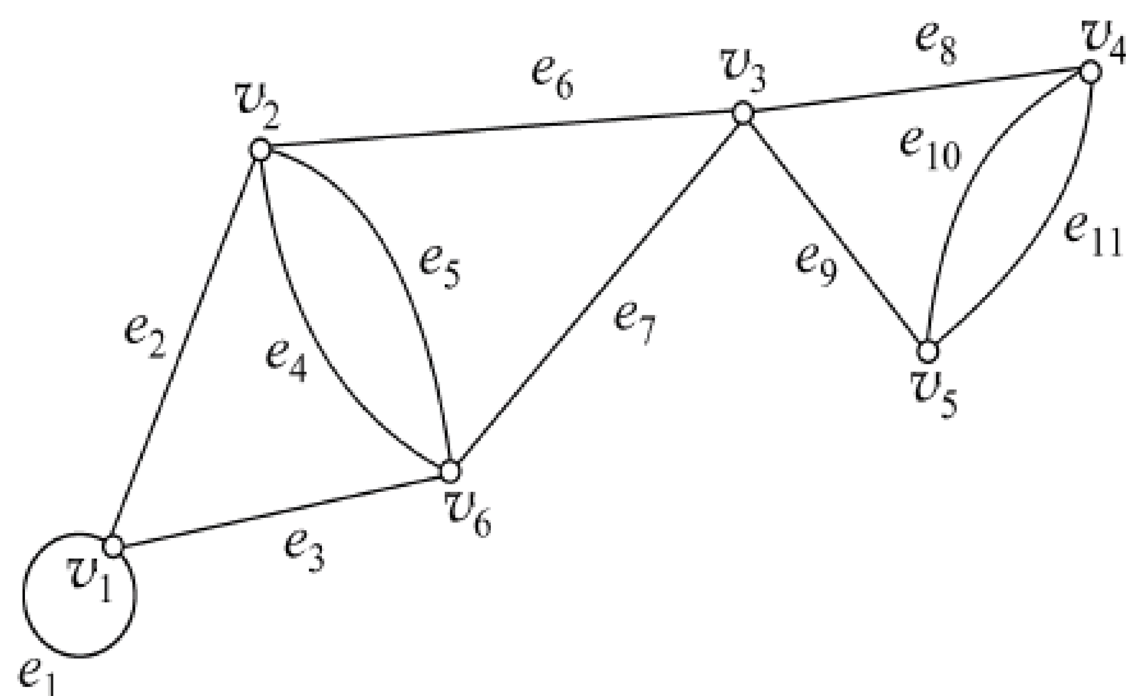


图 6.28

(1) G 中最长的圈长为 4,最短的圈长为 1. 图 6.28 中,$v_1e_3v_6e_7v_3e_6v_2e_2v_1$ 是长度为 4 的圈,而 $v_1e_1v_1$(环)为长度为 1 的圈.

(2) 最长的简单回路的长度为 10,最短的简单回路的长度为 1. $v_1e_1v_1e_2v_2e_4v_6e_5v_2e_6v_3e_8v_4e_{11}v_5e_9v_3e_7v_6e_3v_1$ 为最长的一条简单回路,$v_1e_1v_1$ 为最短的简单回路.

注意 初级回路(圈)都是简单回路,但反之不真.

(3) G 的最小度 $\delta=3$(在顶点 v_4,v_5 达到);

G 的最大度 $\Delta=4$(在顶点 v_1,v_2,v_3,v_6 达到);

G 的点连通度 $\kappa=1$(G 有割点 v_3);

G 的边连通度 $\lambda=2$($\{e_2,e_3\},\{e_6,e_7\}$等为边割集).

6.20 (1) D 中有 3 条非同构的圈,有 4 条非同构的简单回路.

(2) a 到 d 的短程线为 aed,$d\langle a,d\rangle=2$.

(3) d 到 a 的短程线为 $deba$,$d\langle d,a\rangle=3$.

(4) D 是单向连通图.

分析 (1) 对于初级回路(圈)C_1 与 C_2 来说,$C_1 \cong C_2$ 当且仅当 C_1 与 C_2 长度相等,但对于简单回路来说却没有以上性质.图 6.6 所示有向图 D 中,有 3 条初级回路非同构,它们的长度分别为 1,2,3.将它们独立画出来,见图 6.29(a)、(b)、(c)所示.D 中非同构的简单回路,除以上 3 条外,还有一条长度为 5 非圈简单回路,见图 6.29(d)所示,所以 D 中共有 4 条非同构的简单回路.

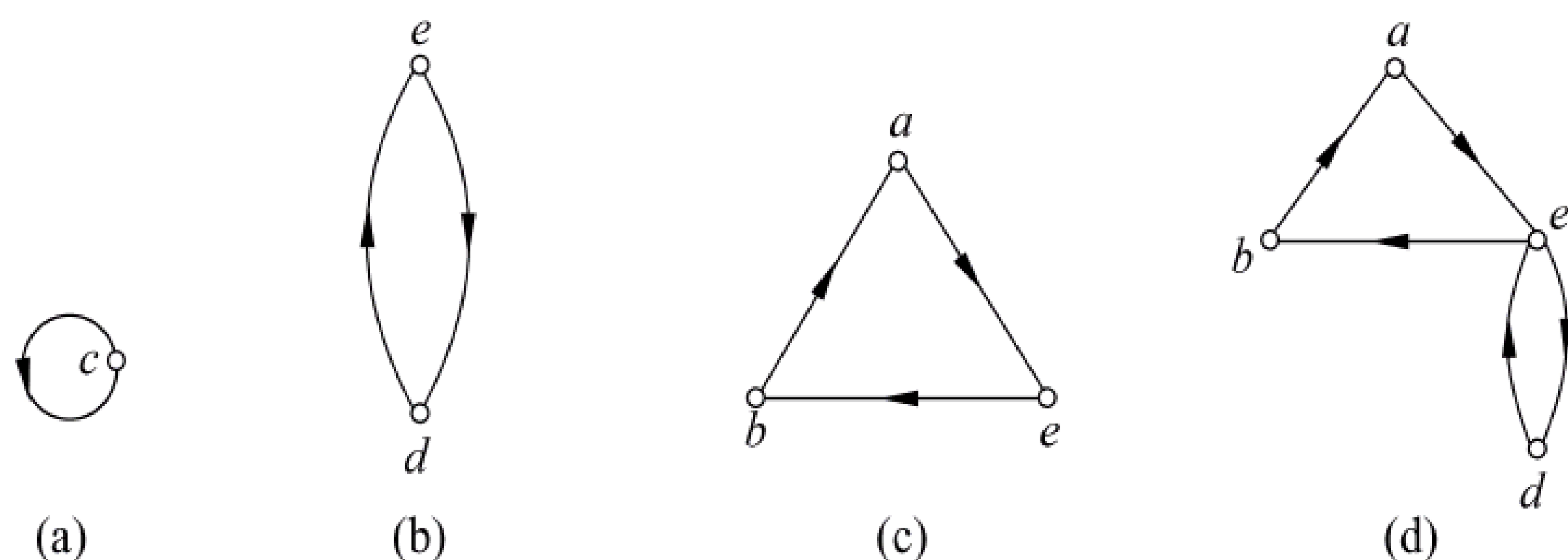


图 6.29

现在要问,若不是同构意义下,而是在定义意义下,图 6.6 所示有向图 D 中有多少条不同的初级回路(圈)? 又有多少条不同的简单回路呢?

在定义意义下,不同始点(终点)的回路看成是不同的.在 D 中,长度为 1 的圈还是一条,即 c 处的环.长度为 2 的有 2 条:ede 和 ded.长度为 3 的有 6 条:$aeba,ebae,baeb,bdeb,debd,ebde$.所以,定义意义下,$D$ 中共有 9 条初级回路.而对简单回路来说,除了以上 9 条以外,还有 $aedeba,edebae,debaed,baedeb$,所以,定义意义下,$D$ 中共有 13 条简单回路.在图比较复杂时,用观察法很难求出 D 中的定义意义上的通路数与回路数,这就要用邻接矩阵及各次幂来求解了.

(2) D 中 a 到 d 的短程线是唯一的,即为 aed,$d\langle a,d\rangle=2$.

(3) D 中 d 到 a 的短程线也是唯一的,即为 $deba$,$d\langle d,a\rangle=3$.

(4) D 中存在经过每个顶点至少一次的通路,如 $aebdc$ 就是其中的一条,所以是单向连通的,但 D 中无经过每个顶点至少一次的回路,所以 D 不是强连通的.

6.21 使用直接证明法证明.

设 G 与 $\bar{G}$ 对应的完全图为 K_n.$V(G)$ 与 $V(\bar{G})$ 分别为 G 与 $\bar{G}$ 的顶点集,易知 $V(G)=V(\bar{G})=V(K_n)$,设它们为 V.又设 $E(G)$ 与 $E(\bar{G})$ 分别为 G 与 $\bar{G}$ 的边集,则 $E(G)\cap E(\bar{G})=\varnothing$,且 $E(G)\cup E(\bar{G})=E(K_n)$.设 G 有 $k(k\geqslant 2)$ 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_k$.下面证明 $\bar{G}$ 连通,又只需证明,$\forall u,v\in V=V(\bar{G})$,$u\sim v$,即 u 到 v 有通路,分以下两种情况讨论.

(1) u 与 v 在 G 的同一连通分支 $G_r(1\leqslant r\leqslant k)$ 中,则对于 G 的任一个另外的连通分支 $G_s(s\neq r)$ 中的任一个顶点 w,根据补图的定义,必有 $(u,w),(v,w)\in E(\bar{G})$,于是在 $\bar{G}$ 中,u 到 v 有通路 uwv,所以,$u\sim v$.

(2) u 与 v 在 G 的不同连通分支 G_i 与 $G_j(i\neq j)$ 中,如 u 在 G_i 中,v 在 G_j 中,由补图定义可知,$(u,v)\in E(\bar{G})$,所以 $u\sim v$.

综上所述,若 G 不连通,则 $\bar{G}$ 必连通.

说明 其实,若 $\bar{G}$ 不连通,则 G 必连通.当然也可能 G 与 $\bar{G}$ 都连通.所以,结论应该是,G 与 $\bar{G}$ 至少有一个是连通的.

6.22　6阶2-正则图只有两种非同构的情况.

分析　由于正则图都是简单图,所以6阶2-正则图中不可能有长为1的圈(环),也不可能有长为2的圈(由两条平行边构成).

设G为6阶2-正则图,其顶点集为V. $\forall v_i \in V$,由于$d(v_i)=2$,又G为简单图,因而必$\exists v_j, v_k \in V$,且$j \neq k, j \neq i, k \neq i$,使得$(v_j, v_i) \in E(G)$,$(v_i, v_k) \in E(G)$,形成长为2的路径$v_j v_i v_k$.下面分两种情况讨论.

(1) v_j与v_k相邻,得一个3阶圈$v_j v_i v_k v_j$. G中另外3个顶点中的任一个都不能与这个3阶圈上的顶点相邻了,否则会出现度数$\geqslant 3$的顶点.并且,另外3个顶点也必然形成3阶圈,于是G由两个3阶圈组成.

(2) v_j与v_k不相邻,此时,必存在v_i、v_j、v_k外的顶点,如v_l与v_j或v_k相邻,不妨设v_l与v_k相邻,形成长度为3的路径$v_j v_i v_k v_l$,这时,v_j与v_l不能相邻,否则形成4阶圈$v_j v_i v_k v_l v_j$,圈外的两个顶点不能与圈上的顶点相邻,彼此相邻后又均只能是1度顶点.所以只能是6个顶点构成一个6阶圈$v_j v_i v_k v_l v_s v_t v_j$.

综上所述,6阶2-正则图只能有两种非同构的情况,见图6.30(a)、(b)所示.它们都是K_6的生成子图.

6.23　利用题6.13和题6.22证明本题.

首先求解n和m.由已知条件可得方程组

$$\begin{cases} 2n - m = 3 \\ 3n - 2m = 0 \end{cases}$$

解出$n=6, m=9$,所讨论的图都是6阶9条边的3-正则图,它们都是K_6的生成子图.这些图的补图都是6阶2-正则图.由6.22题可知,6阶2-正则图只有两种非同构的情况,由题6.13可知,6阶3-正则图也只有两种非同构的情况,见图6.31(a)、(b)所示,它们分别与图6.30(a)、(b)互为补图.

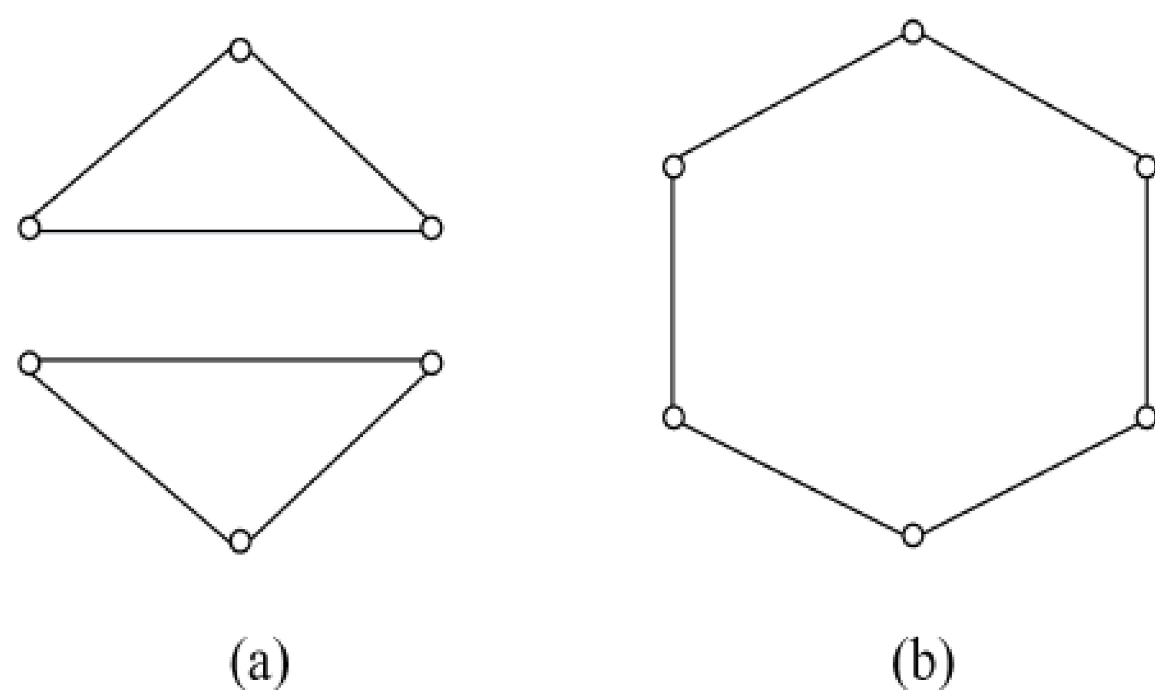


图　6.30

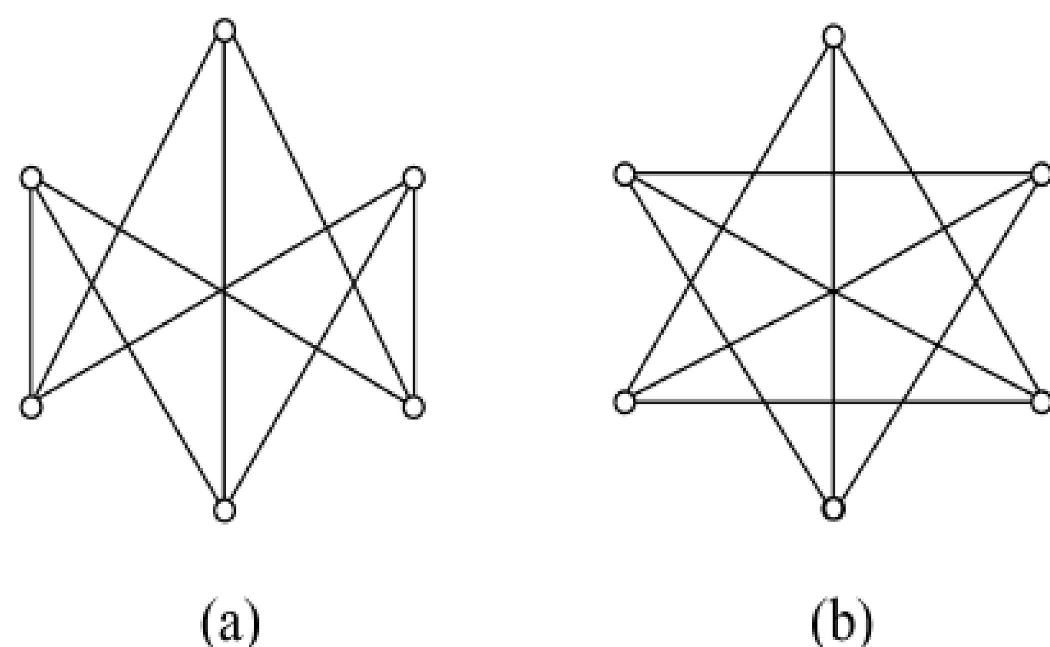


图　6.31

6.24　首先给图6.1的边标记,如图6.32所示.它的关联矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

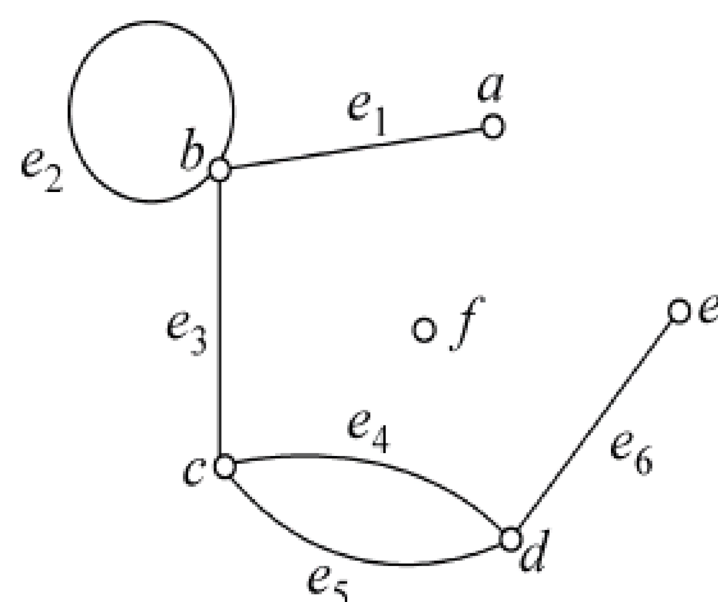


图　6.32

6.25　(1) $d^+(v_1)=4, d^-(v_1)=0, d(v_1)=4, d^+(v_2)=1$, $d^-(v_2)=1, d(v_2)=2, d^+(v_3)=0, d^-(v_3)=3, d(v_3)=3$, $d^+(v_4)=0, d^-(v_4)=1, d(v_4)=1$.

(2) e_4 与 e_5 是平行边.

6.26　先写出 D 的邻接矩阵和它的 2～5 次幂.

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&2&0&2\\0&0&1&0&0\\0&1&1&1&0\\1&0&2&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&2&1&1\\0&2&2&2&0\\0&0&1&0&0\\1&0&3&1&1\\0&1&3&1&2\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&1&3&1&2\\2&0&6&2&2\\0&0&1&0&0\\0&1&4&1&2\\1&2&5&3&1\end{bmatrix}$$

$$A^5=\begin{bmatrix}1&2&5&3&1\\0&2&8&2&4\\0&0&1&0&0\\1&2&6&3&1\\2&1&10&3&4\end{bmatrix}$$

(1) a 到 d 长度为 1,2,3,4,5 的通路分别为 0 条,1 条,1 条,1 条,3 条.

(2) a 到 d 长度小于等于 3 的通路为 2 条.

(3) a 到 a 长度为 1,2,3,4,5 的回路分别为 0 条,0 条,1 条,0 条,1 条.

(4) d 到 d 长度小于等于 3 的回路为 2 条.

(5) D 中长度等于 5 的通路(不含回路)共 51 条.

(6) D 中长度等于 5 的回路共 11 条.

(7) D 中长度小于等于 5 的通路共 151 条,其中回路 25 条.

(8) 由 $p_{ij}=1$ 当且仅当 $a_{ij}^{(1)}+a_{ij}^{(2)}+a_{ij}^{(3)}+a_{ij}^{(4)}>0, i\neq j$,可达矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

分析　用邻接矩阵计算的有向图的通路数和回路数都是在定义意义下的,一个长度为 k 的回路在定义意义下是 k 条回路.

6.27　写出它的相邻矩阵及 2～4 次幂.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&1&0&2&0&0\\0&0&2&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&3&1&2&0&0\\1&1&5&0&2&0\\0&2&0&5&0&0\\0&0&2&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3=\begin{bmatrix}1&3&1&2&0&0\\3&5&7&2&2&0\\1&7&1&12&0&0\\2&2&12&0&5&0\\0&2&0&5&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}^4=\begin{bmatrix}3&5&7&2&2&0\\5&15&9&16&2&0\\7&9&31&2&12&0\\2&16&2&29&0&0\\2&2&12&0&5&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(1) a 到 c 长度为 1、2、3、4 的通路分别有 0 条、1 条、1 条、7 条.

(2) a 到自身长度为 1、2、3、4 的回路分别有 0 条、1 条、1 条、3 条.

(3) 注意到 f 是孤立点,初级通路最长为 4,由 $A+A^2+A^3+A^4$,G 的可达矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

6.28 用握手定理的推论证明本题,使用归谬法比较方便.

设 G 的两个奇度顶点分别为 u 和 v. 若 u 与 v 不连通,即它们之间无通路,则 u 与 v 必处于 G 的不同连通分支中,不妨设 u 在 G 的连通分支 G_1 中,v 在 G_2 中,由于 G 中只有两个奇度顶点,于是 G_1 与 G_2 中均各有一个奇度顶点,当对 G_1 与 G_2 使用握手定理推论时,都会引出矛盾,所以奇度顶点 u 与 v 必处于 G 的同一个连通分支中,即它们之间必有通路,也即它们必连通.

6.29 设 e 为与 v 关联的割边(桥).

先证明:若 v 为割点,则 v 不是悬挂顶点(1 度顶点),用归谬法证明之. 否则,若 v 是悬挂顶点,则从 G 中删除 v,只是将 v 及关联割边 e 从 G 中去掉了,因而 $p(G-v)=p(G)$,即从 G 中删除 v,所得图 $G-v$ 与 G 的连通分支数相同,这与 v 为割点相矛盾.

再证明:若 v 不是悬挂顶点,则 v 为割点. 由于 v 不是 1 度顶点,因而 v 除与割边 e 关联外,还必须与另外一些边,比如 $e_1,e_2,\cdots,e_r$ 相关联,当从 G 中删除 v 时,$e,e_1,e_2,\cdots,e_r$ 全被删除,可是 e 是割边,因而 $p(G-v)>p(G)$,所以 v 为割点.

6.30 图 6.7(a)、(b)所示的图为二部图,而图 6.7(c)所示的图不是二部图.

一个无向图 G 是二部图当且仅当 G 中无奇长回路,图 6.7(a)、(b)所示图中无奇长回路,而图 6.7(c)所示图中,$bcgfdb$ 与 $bdfeab$ 都是长为 5 的回路. 图 6.7(a)、(b)所示二部图的标准形式分别由图 6.33(a)、(b)所示.

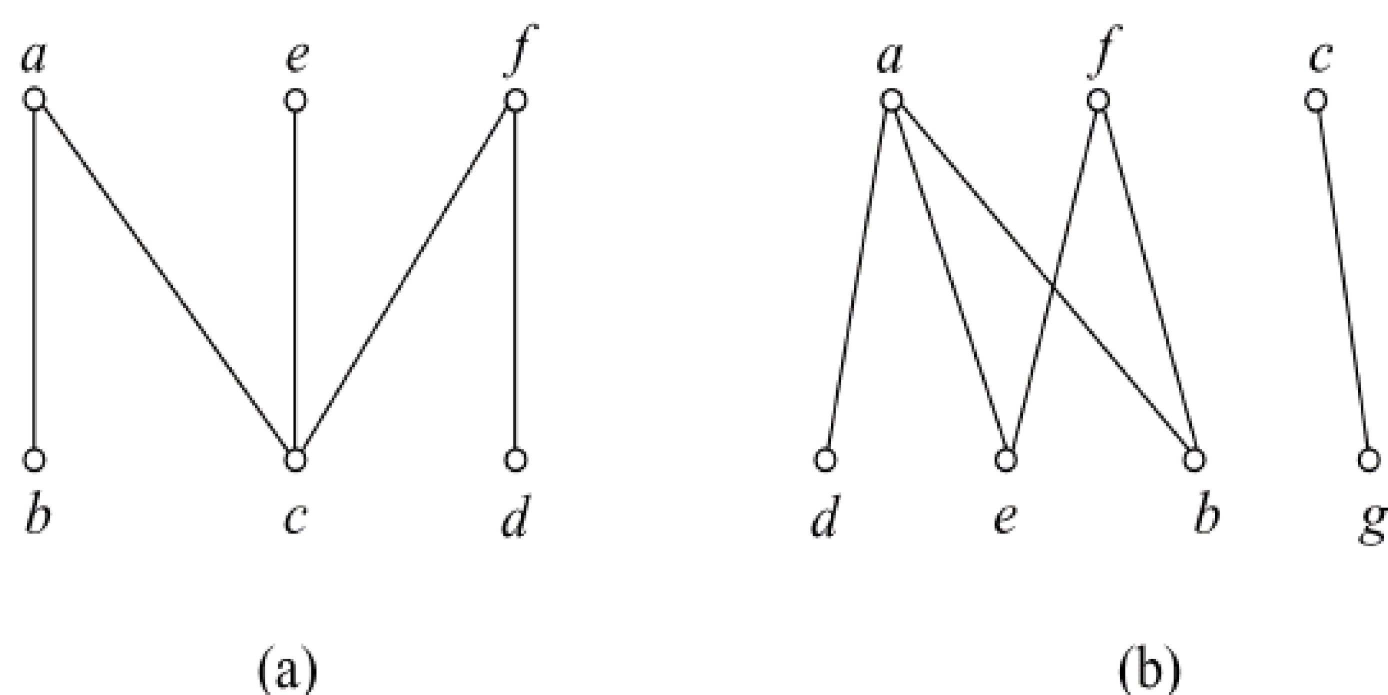


图 6.33

6.31　当 $n=2k(k\in\mathbf{N}\wedge k\geqslant2)$ 时，圈图 C_n 为二部图.

分析　图 G 为二部图当且仅当 G 中不含奇圈. 因而要求 n 为偶数，又因为在圈图定义中，要求 $n\geqslant3$，所以圈图为二部图当且仅当 n 为大于等于 4 的偶数.

6.32　$n=1$ 或 $n=2$ 时 K_n 为二部图.

分析　平凡图为二部图，所以 K_1 为二部图，K_2 中无奇长回路，所以 K_2 为二部图. 而当 $n\geqslant3$时，K_n 中均含奇圈（如 K_3 是 $K_n(n\geqslant3)$的子图），所以当 $n\geqslant3$ 时，K_n 都不是二部图.

6.33　根据轮图 W_n 的定义可知，$n\geqslant4$，因而任何轮图中都含 K_3，即都含长度为 3 的圈，所以 W_n 不是二部图.

6.34　图 G 的图形如图 6.34(a)所示. 每一个完美匹配给出一个分配方案，共有 3 种不同的分配方案：

方案 1　甲完成 a，乙完成 b，丙完成 c；

方案 2　甲完成 b，乙完成 a，丙完成 c；

方案 3　甲完成 c，乙完成 a，丙完成 b.

对应的匹配是

方案 1　$M_1=\{(甲,a),(乙,b),(丙,c)\}$，见图 6.34(b)所示；

方案 2　$M_2=\{(甲,b),(乙,a),(丙,c)\}$，见图 6.34(c)所示；

方案 3　$M_3=\{(甲,c),(乙,a),(丙,b)\}$，见图 6.34(d)所示.

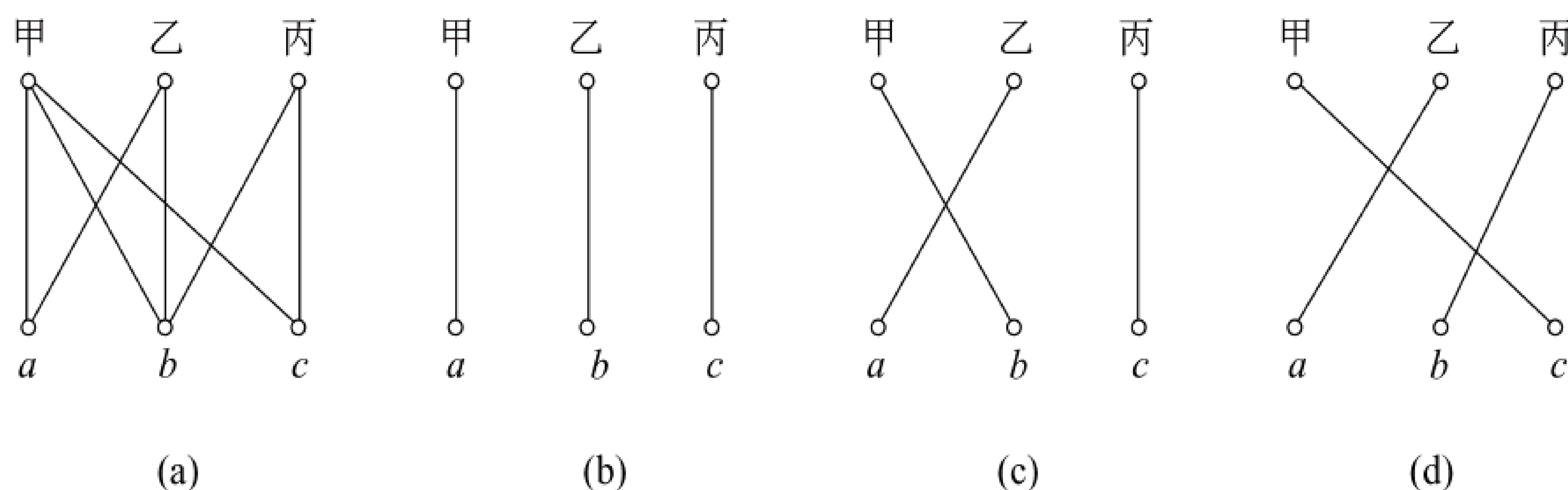


图　6.34

6.35　在图 6.8 中，图(a)满足相异性条件，但不满足 t 条件. 有完备匹配，并且是完美匹配. 图(b)不满足相异性条件，u_1,u_2,u_4 只与 v_1,v_4 关联. 反过来，v_2,v_3 只与 u_3 关联. 当然也不满足 t 条件. 不存在完备匹配. 图(c)满足 $t(t=2)$条件，当然也满足相异性条件. 有完备匹配，但不是完美匹配.

分析　满足相异性条件是存在完备匹配的充分必要条件，而满足 t 条件是存在完备匹配的充分条件. 不满足相异性条件一定也不满足 t 条件，满足 t 条件一定也满足相异性条件.

6.36　作二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，其中 V_1 是 6 个部门，V_2 是 10 位应聘者，部门 u 与应聘者 v 相邻当且仅当应聘者 v 申请部门 u. 根据题设，V_1 的每个顶点至少关联 2 条边，V_2 的每个顶点至多关联 2 条边. G 满足 $t(t=2)$条件，存在 V_1 到 V_2 的完备匹配，故这 6 个部门都能招聘到人.

6.37　作二部图 $G=\langle V_1,V_2,E\rangle$，其中 $V_1=\{$张生，王庆，李民，赵久$\}$，$V_2=\{$刘教授，孙

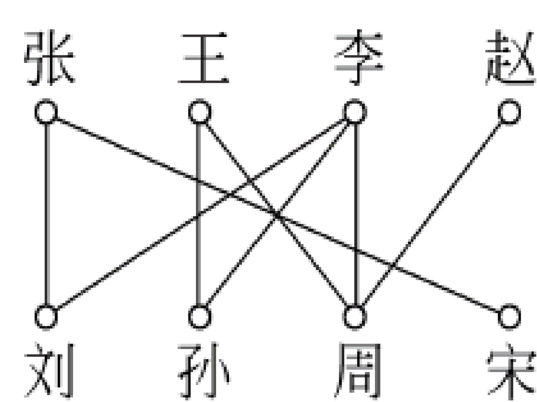


图 6.35

教授,周教授,宋教授},$E=\{(u,v)\mid u\in V_1,v\in V_2$,且 u 报考 $v\}$,如图 6.35 所示.

不难看出{(张生,宋教授),(王庆,孙教授),(李民,刘教授),(赵久,周教授)}是一个完美匹配,它恰好给出每位教授录取一名硕士研究生的分配方案.

6.38 本题所要求的无向简单欧拉图很多,每种都可以给出若干族图.

(1) 给定一个 n(n 为≥4 的偶数)阶偶圈 C_n,使 C_n 上的每个顶 $v_i(i=1,2,\cdots,n)$都成为 C_n 与另一个阶数≥4 的偶圈的公共顶点,则所得图具有偶数个顶点,偶数条边,且为欧拉图.当 $n=4$,另外 4 个偶圈的阶数分别为 4、4、4、6 的图如图 6.36(a)所示.

(2) 在(1)中给出的图族中,只需将 C_n 上的某一个顶点(只一个顶点)所共用的偶圈改成长度≥3 的奇圈,就得到一个奇数个顶点、奇数条边的简单欧拉图.图 6.36(b)所示的图就是其中的一个.

(3) 设 C_n(n≥3 的奇数)为 n 阶奇圈,让 C_n 上每个顶点都共一个偶圈(阶数≥4),所得简单图为偶数个顶点、奇数条边的欧拉图.图 6.36(c)所示就为其中的一个.

(4) 类似可定义一族图是奇数个顶点、偶数条边的简单欧拉图,图 6.36(d)所示的图是一个特例.

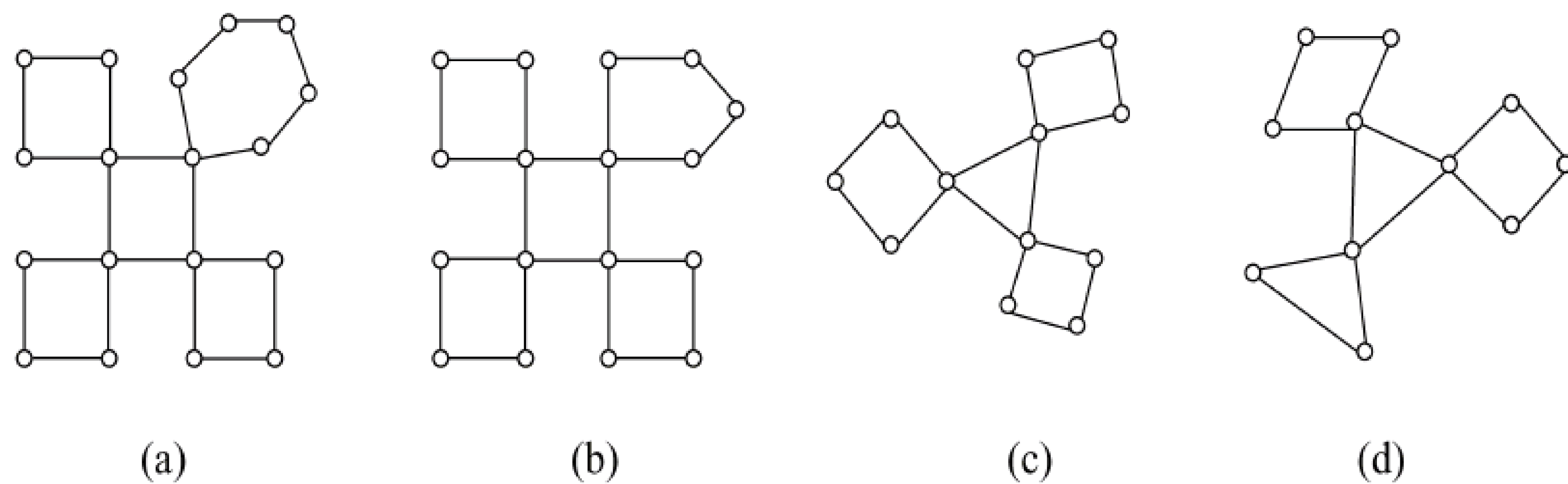


图 6.36

6.39 (1) n 为奇数(即 $n=2k+1,k\in\mathbf{N}$)时,K_n 为欧拉图.此时,K_n 的各顶点的度数均为 $2k$.

(2) 任何阶有向完全图都是欧拉图.

(3) 任何阶轮图都不是欧拉图.若 n 为奇数,则 W_n 中有 $n-1$ 个奇度顶点,而当 n 为偶数时,W_n 中无偶度顶点,所以 W_n 不是欧拉图.

(4) 当 $r\geqslant2,s\geqslant2$,且 r,s 均为偶数时,$K_{r,s}$为欧拉图.

6.40 (1) 除 K_2 不是哈密顿图外,$K_n(n\neq2)$全是哈密顿图.注意:平凡图是哈密顿图,所以 K_1 是哈密顿图.当 $n\geqslant3$ 时,K_n 中均有长度为 n 的圈,这些圈均为 K_n 中的哈密顿回路.

(2) 任何阶的有向完全图都是有向哈密顿图,平凡有向图是哈密顿图.

(3) 轮图 W_n 都是哈密顿图.在轮图的定义中,已规定 $n\geqslant4$,因而在 W_n 中都存在 n 阶圈(生成圈),所以 W_n 都是哈密顿图.

(4) 当 $r=s\geqslant2$ 时,$K_{r,s}$为哈密顿图.

6.41 (1) 所有的有向圈图 $C_n(n\geqslant3)$既是有向欧拉图,又是有向哈密顿图,图 6.37(a)所示为一个特例.

(2) 让两个有向圈图 $C_n(n\geqslant3)$ 与 $C_m(m\geqslant3)$ 共一个顶点 v,所得图是有向欧拉图,但不是哈密顿图.图 6.37(b)所示的图为一个特例.

(3) 在一个有向圈图 $C_n(n\geqslant4)$ 的不相邻的顶点之间加一条有向边,所得图依然是哈密顿图,但不是欧拉图.图 6.37(c)所示为一个特例.

(4) 在(2)中所得图中的一个有向圈的不相邻顶点之间加一条有向边,所得图既不是欧拉图,也不是哈密顿图.图 6.37(d)所示为一个特例.

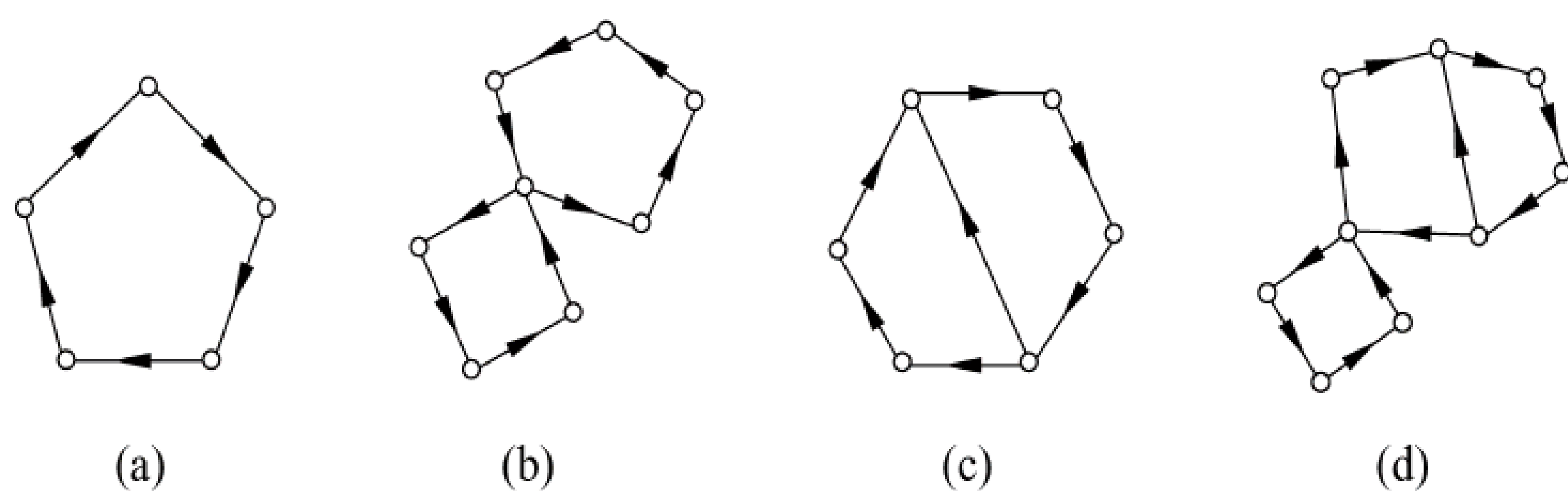


图 6.37

6.42 利用主教材中定理 6.10 的推论(有割点的图一定不是哈密顿图)以及题 6.26 的结论证明本题.

设 G 为带桥(割边)e 的连通无向图.若 G 是含 e 的 K_2,G 当然不是哈密顿图,否则,G 的阶数 $n\geqslant3$,设桥 $e=(u,v)$,则由于 G 的连通性,u 与 v 中至少有一个不是悬挂顶点,不妨设 u 不是悬挂顶点,由题 6.26 可知,u 是割点,由主教材中定理 6.10 的推论可知,G 不是哈密顿图.

6.43 证明中用欧拉图的性质及握手定理的推论,使用归谬法.

若存在带桥的连通的无向图 G 是欧拉图,则 G 中所有顶点的度数都是偶数.设桥 $e=(u,v)$,考虑 $G'=G-e$,由于 e 为桥,所以 G' 有两个连通分支 G_1' 与 G_2',设 u 在 G_1' 中,v 在 G_2' 中,则 $d_{G_1'}(u)=d_G(u)-1$ 为奇数,$d_{G_2'}(v)=d_G(v)-1$ 为奇数,而 G_1' 与 G_2' 中其余顶点都是偶度顶点,这与握手定理的推论相矛盾.

6.44 根据无向欧拉图的判别定理,在图 6.9 中,图(a)没有奇度顶点,有欧拉回路.图(b)中有 4 个(b,d,f,h)奇度顶点,没有欧拉通路,更没有欧拉回路.图(c)中有 2 个(b,f)奇度顶点,有欧拉通路,但没有欧拉回路.

6.45 根据有向欧拉图的判别定理,在图 6.10 中,图(a)中顶点 b 的出度比入度大 1,顶点 d 的入度比出度大 1,另外 2 个顶点(a,c)的出度等于入度,故有欧拉通路,但无欧拉回路.图(b)中 4 个顶点的出度都等于入度,故有欧拉回路.图(c)中顶点 b 的入度比出度大 2,顶点 d 的出度比入度大 2,故没有欧拉通路,更没有欧拉回路.

6.46 在图 6.11 中,图(a)有桥,故没有哈密顿回路.但它有哈密顿通路,如 $fgeabcd$.对于图(b),删去$\{b,d,f,h\}$后的图有 5 个连通分支,故没有哈密顿回路.它也有哈密顿通路,如 $abcdefghlijk$.图(c)有哈密顿回路,如 $abcdhgfea$.图(d)删去$\{b,d,f,h\}$后的图有 5 个连通分支,故没有哈密顿回路.但它有哈密顿通路,如 $abcdefghi$.

6.47 (1) 证明图 6.12(a)所示图 G 不是哈密顿图.将此图顶点标定,见图 6.38(a)所示.取 $V_1=\{a,e,f,g,k\}$,$G-V_1$ 为图 6.38(b)所示,$p(G-V_1)=6>|V_1|=5$,由主教材中

定理6.10可知,G 不是哈密顿图.

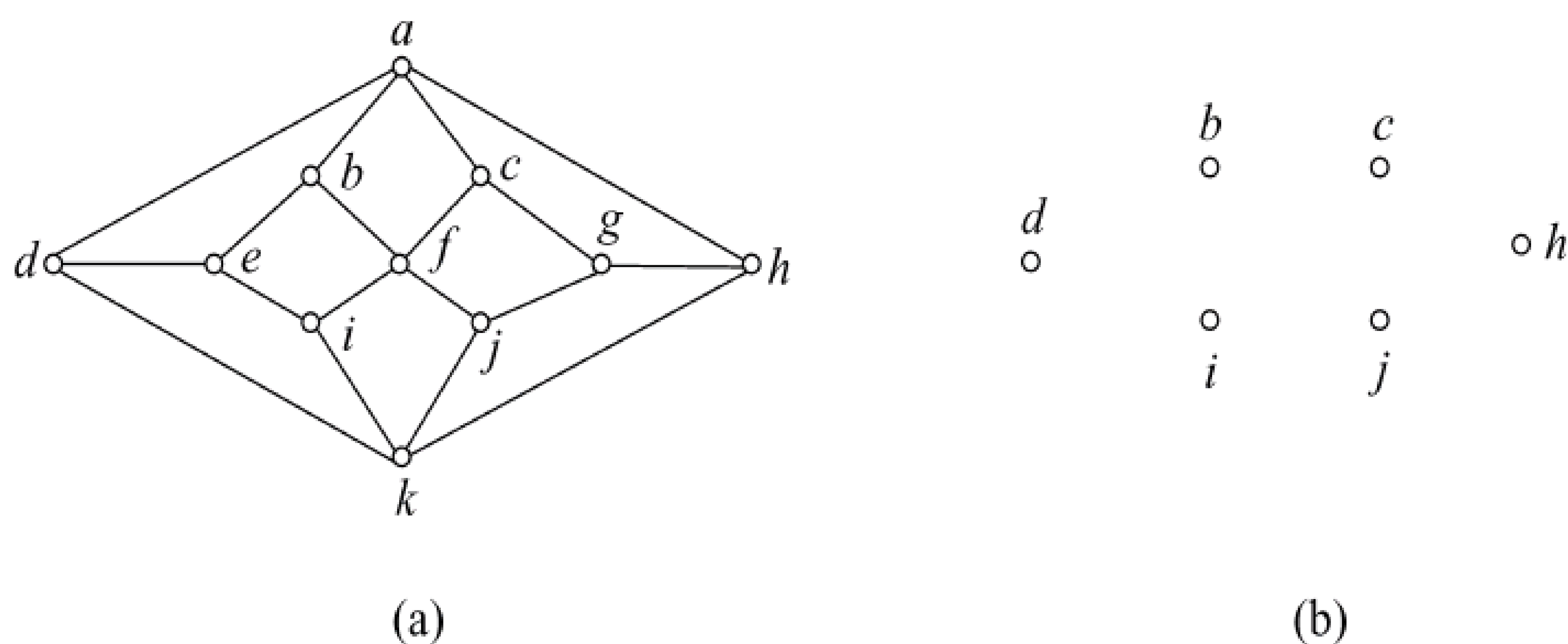


图 6.38

(2) 图6.12(b)所示的图是哈密顿图.将该图顶点标定,见图6.39所示.在图6.39中,$ahgfibcdeja$ 为图中一条哈密顿回路,所以该图为哈密顿图.

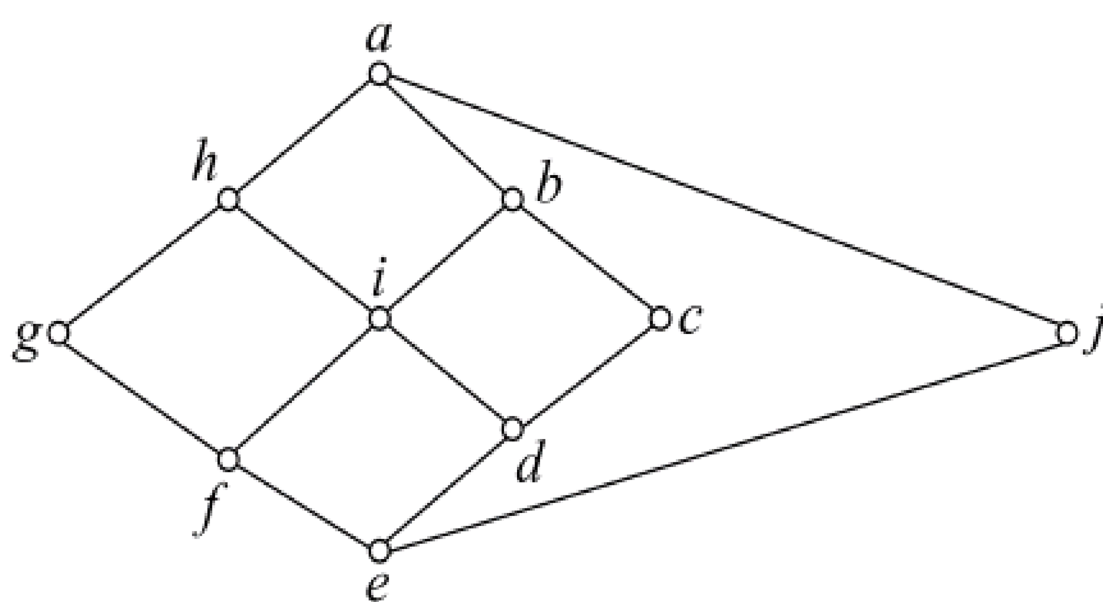


图 6.39

6.48 该青年应该按图6.13中所示带权图(各边均带有实数的图),走一条距离最近的哈密顿回路.这里可用穷举法来寻找距离最近的哈密顿回路.设:

$$C_1=ABCDA, \quad w(C_1)=32$$
$$C_2=ABDCA, \quad w(C_2)=46$$
$$C_3=ACBDA, \quad w(C_3)=44$$
$$C_4=ACDBA, \quad w(C_4)=46$$
$$C_5=ADBCA, \quad w(C_5)=44$$
$$C_6=ADCBA, \quad w(C_6)=32$$

这里,$w(C_i)$ 为 C_i 的长度.该青年按 C_1 或 C_6 中景点的顺序去旅游所走路程最近.

本题是在完全带权图 K_n 中求最短哈密顿回路问题,也称“货郎担问题”.当 n 较大时,求解货郎担问题不是易事,计算量大得惊人.

6.49 本题是将有关事物之间的关系转化成无向图,证明所得图为哈密顿图的问题.

作无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$,其中,$V=\{v|v$ 为六种颜色的纱之一$\}$,则 $|V|=6$;$E=\{(u,v)|u,v\in V$ 且 $u\neq v$ 且 u 与 v 能搭配$\}$.

由已知条件可知,$\forall u,v\in V$,都有

$$d(u)+d(v)\geqslant 3+3=6$$

由主教材中定理6.11可知 G 为哈密顿图,因而存在哈密顿回路,设 $C=v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_6}v_{i_1}$ 为其中的一条,由 G 的构造可知,C 上任何两个顶点相邻当且仅当它们代表的颜色的纱能织成双色布.比如,让颜色 v_{i_1} 与 v_{i_2} 染成的纱织成一种双色布,v_{i_3} 与 v_{i_4} 染成的纱织成另一种双色布,再让 v_{i_5} 与 v_{i_6} 染成的纱织成第三种双色布,三种双色布用上了6种不同颜色的纱.

6.50 图6.14所示平面图 G 的边数 $m=14$.

$$\deg(R_1)=1, \quad \deg(R_2)=3$$
$$\deg(R_3)=6, \quad \deg(R_4)=2$$
$$\deg(R_5)=3, \quad \deg(R_0)=13$$

$$\sum_{i=0}^{5}\deg(R_i) = 28 = 2 \times 14$$

注意 桥在计算它所在的面的次数时都提供 2.

6.51 将图 6.15 所示平面图的内部面 R_1 变成外部面所得平面图如图 6.40(a)所示.将 R_2 变成外部面如图 6.40(b)所示.

6.52 图 6.16 所示无向图 G 有平面嵌入,见图 6.41 所示,因而 G 为平面图.

根据"定理:设 G 为 $n(n\geqslant 3)$ 阶平面图,则 G 为极大平面图当且仅当 G 的每个面的次数都是 3",从图 6.41 可知,G 的 8 个面的次数均为 3,所以 G 为极大平面图.

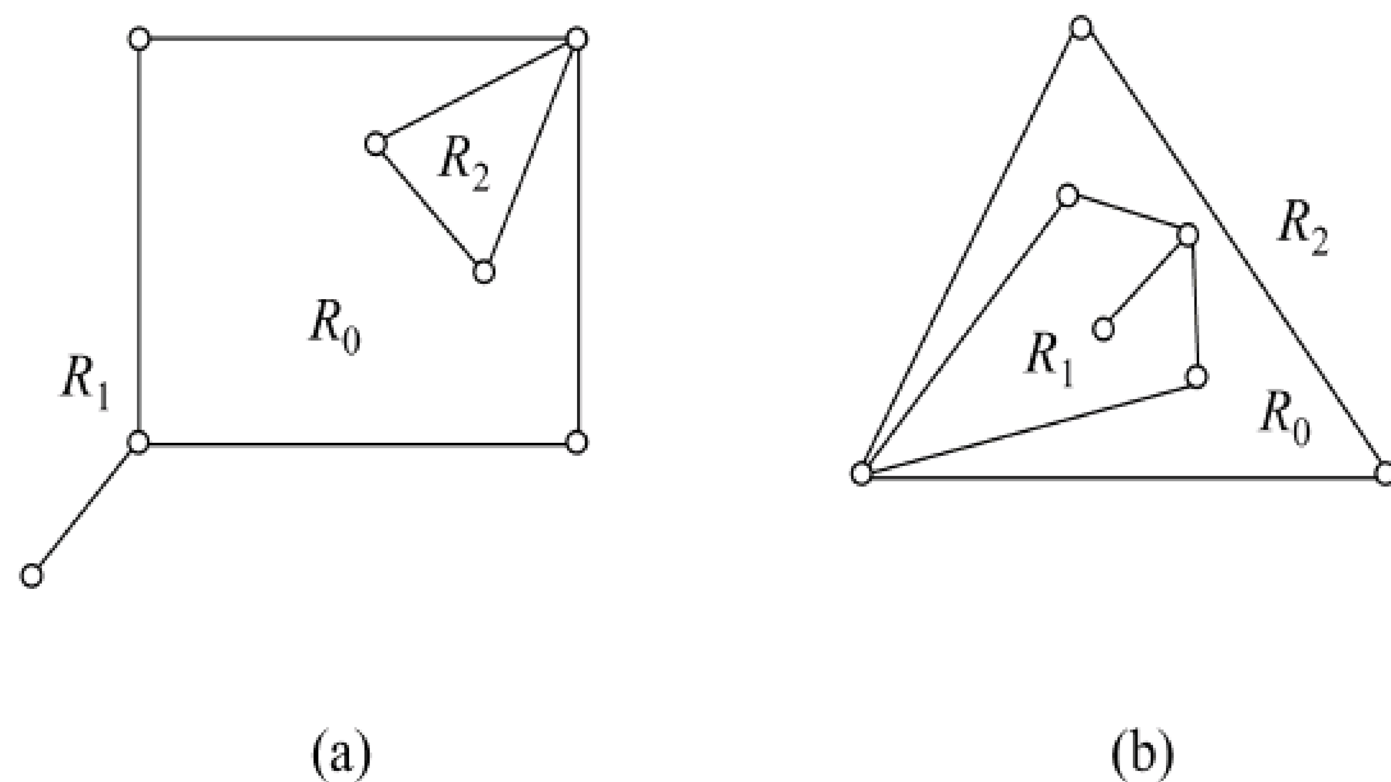


图 6.40

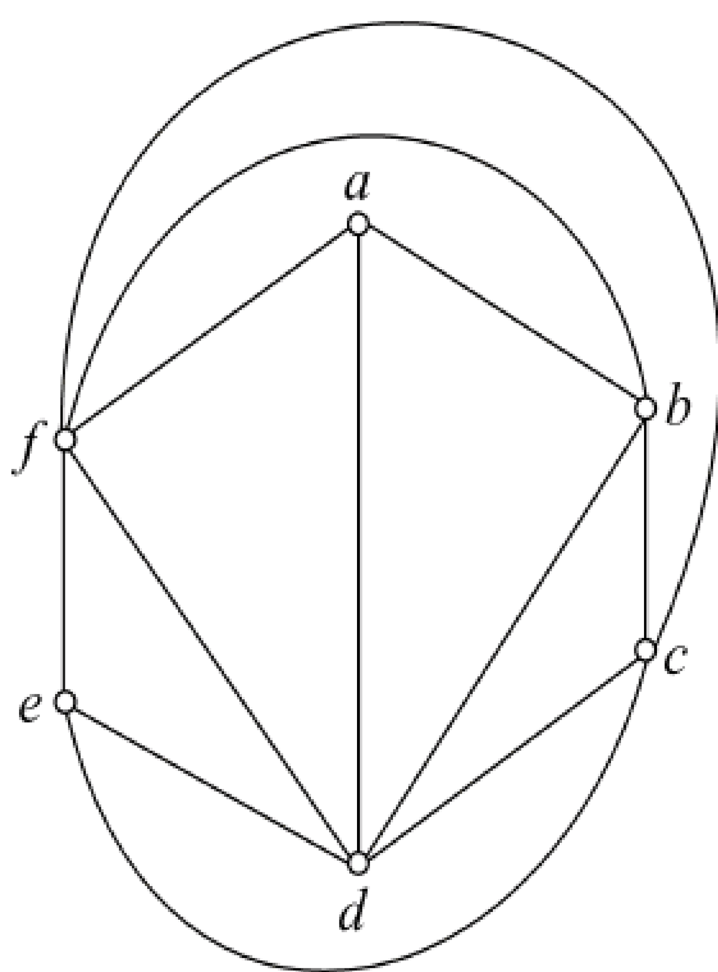


图 6.41

6.53 图 6.42 中给出了两个 7 阶极小非平面图,其中图 6.42(a)所示的图为在 K_5 中插入两个 2 度顶点得到,图 6.42(b)所示的图为在 $K_{3,3}$ 中插入一个 2 度顶点得到.

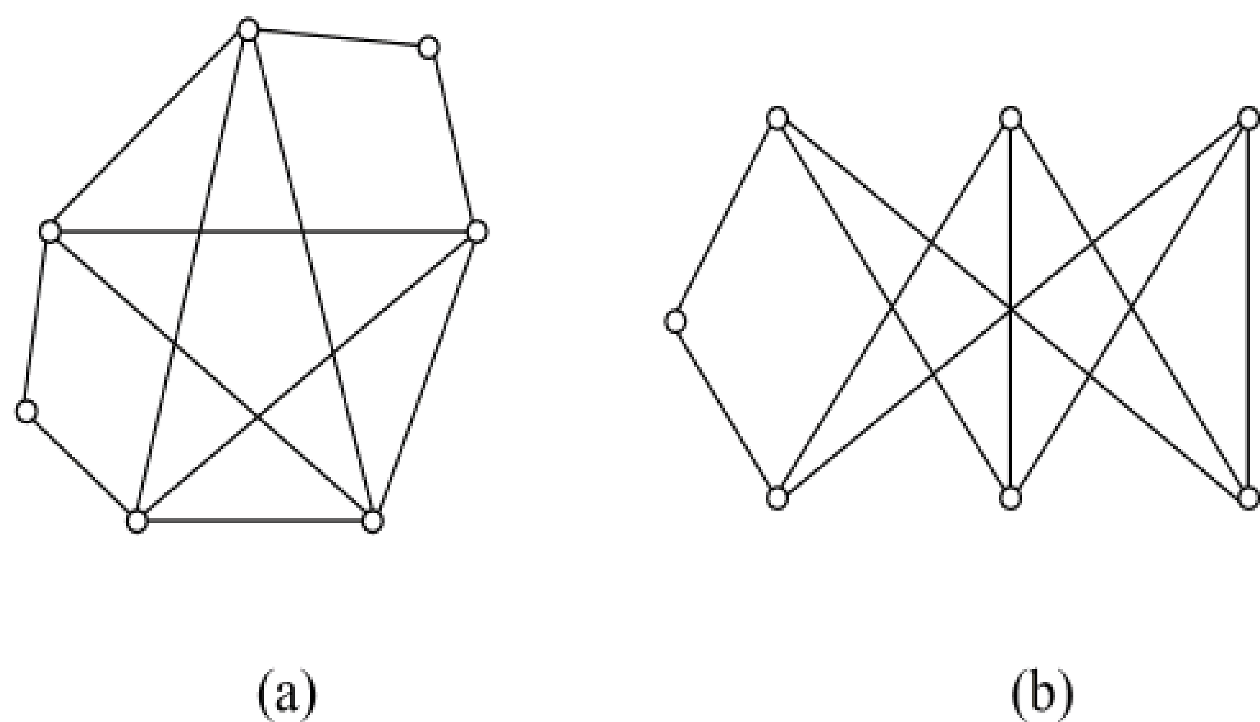


图 6.42

分析 若一个无向图 G 是平面图,则在 G 中插入有限个 2 度顶点,或消去有限个 2 度顶点(若存在 2 度顶点)后所得图 G' 仍然是平面图.同样地,对一个非平面图 G 进行插入 2 度顶点,或消去 2 度顶点(若存在),所得图 G' 仍为非平面图.也就是说,2 度顶点的多少不影响图的平面性.已知 K_5 和 $K_{3,3}$ 都是极小非平面图,则与它们同胚的图也是极小非平面图.图 6.42(a)所示的图与 K_5 同胚,所以它是 7 阶极小非平面图,删除它中的任何一条边后所得图为平面图.类似讨论可知图 6.42(b)所示的图也是 7 阶极小非平面图.

6.54 G 的边数 $m=11$.

分析 由于 G 是连通的平面图,所以 G 的阶数 n、边数 m、面数 r 满足欧拉公式:

$$n - m + r = 2$$

已知,$n=7$,$r=6$,所以 $m=n+r-2=7+6-2=11$.

6.55　G的阶数$n=9$.

分析　由于G的连通分支数$k=3$,应用欧拉公式的推论应有

$$n-m+r=k+1$$

已知,$r=4$,$m=9$,所以阶数$n=k+1+m-r=3+1+9-4=9$.

6.56　(1) 证明图6.17(a)所示图为非平面图.图6.43所示的图为图6.17(a)所示图的子图.此图与$K_{3,3}$同构,互补顶点子集$V_1=\{a,b,c\}$,$V_2=\{1,2,3\}$,由库拉图斯基定理可知,图6.17(a)所示的图为非平面图.

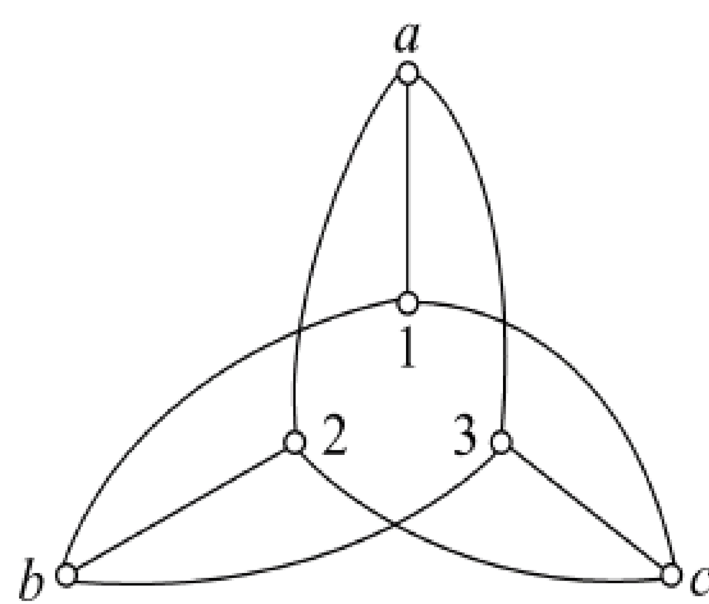
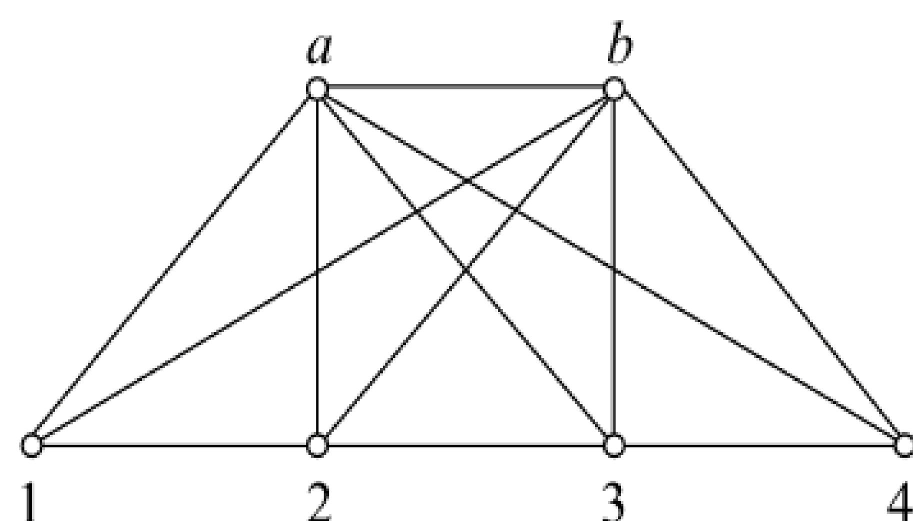


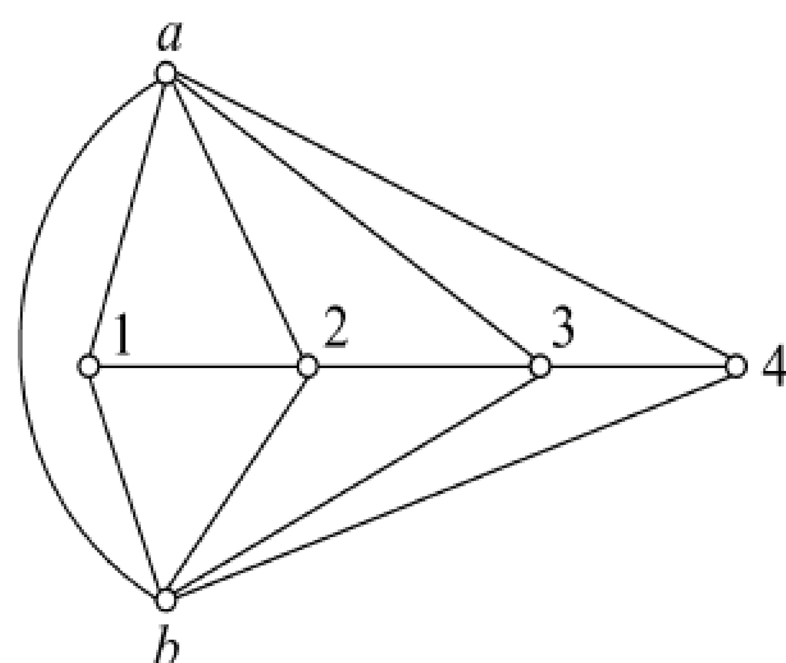
图　6.43

(2) 图6.17(b)所示的图是5阶简单图,且图中任何两个顶点均彼此相邻,所以该图与K_5同构,由库拉图斯基定理可知,该图为非平面图.

6.57　论证图6.18所示的图有平面嵌入.设此图为G,将G的各顶点标定,见图6.44(a)所示.只要将顶点b(或顶点a)移动位置,就可得到G的平面嵌入,见图6.44(b)所示,所以G为平面图.



(a)

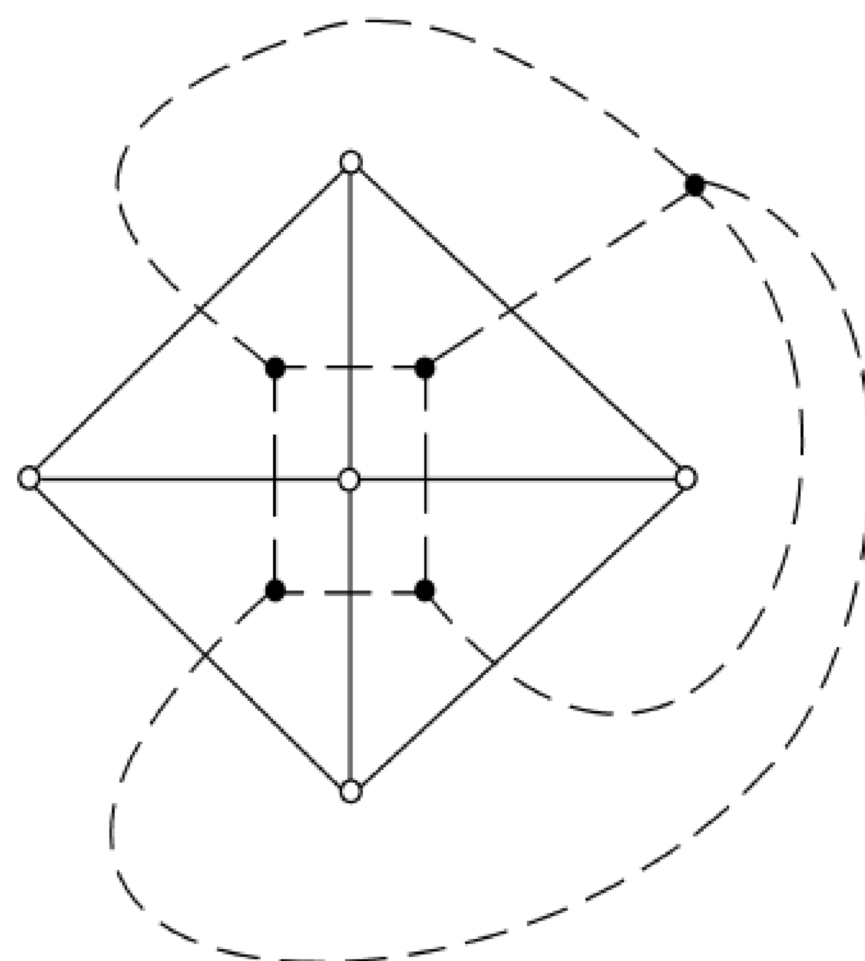


(b)

图　6.44

分析　证明某图G为平面图,只要找出G的平面嵌入即可.而证明某图G为非平面图,就要找到与K_5或$K_{3,3}$同胚子图,或者找到可以收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图,由库拉图斯基定理可证明G为非平面图.

6.58　在图6.45中,虚心点实线边所示的图为轮图W_5,而实心点虚线边所示的图为W_5的对偶图W_5^*,W_5^*也是5阶轮图,只是它的外部面由次数为3的面充当,因而在同构的意义下,它们都是5阶轮图,所以$W_5^* \cong W_5$.


图　6.45

6.59　由主教材中定理6.13和欧拉公式证明本题.

由于G是连通平面图,因而满足欧拉公式:

$$n-m+r=2 \qquad ①$$

又由于G的每个面的次数至少为4,及主教材中定理6.13可知

$$2m=\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)\geqslant 4r \qquad ②$$

由②可得

$$r \leqslant \frac{m}{2} \qquad ③$$

将③代入①，可得

$$2 = n - m + r \leqslant n - m + \frac{m}{2} = n - \frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow m \leqslant 2n - 4$$

6.60 (1)C_7 至少要用 3 种颜色.(2)C_8 至少要用 2 种颜色.(3)W_9 至少要用 3 种颜色.(4)W_{10}至少要用 4 种颜色.(5)K_n 至少要用 n 种颜色.(6)$K_{s,t}$ 当 $s \geqslant 1$ 且 $t \geqslant 1$ 时至少要用 2 种颜色；当 $s=0$ 或 $t=0$ 时只需要一种颜色.

分析 偶阶圈图至少要用 2 种颜色，奇阶圈图至少要用 3 种颜色. 偶阶轮图至少要用 4 种颜色，奇阶轮图至少要用 3 种颜色. n 阶完全图要用n 种颜色. 二部图只要 2 种颜色，当二部图为零图时只要一种颜色.

6.61 图 6.11(a)、(b)、(c)、(d)分别至少要用 3、3、2、3 种颜色.

6.62 做无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$V=\{\ v_i \mid i=1,2,3,4,5\}$，$E=\{(\ v_i, v_j) \mid v_i$ 与 v_j 有人同时选，$1 \leqslant i < j \leqslant 5\ \}$，如图 6.46 所示. 显然，课程 v_i 与 v_j 可以同时考当且仅当没有人同时选 v_i 与 v_j，又当且仅当在 G 的着色中 v_i 与 v_j 可涂同一种颜色. 不难看出给 G 着色至少需要 3 种颜色，给 v_2 与 v_3 涂颜色 α，v_1 与 v_5 涂颜色 β，v_4 涂颜色 γ. 因而至少需要 3 个时间段才考完这 5 门课程.

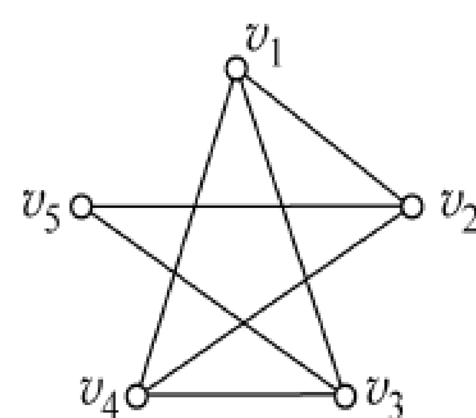


图 6.46

6.63 作图 $G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_i \mid i=1,2,3,4,5,6\}$，每个 v_i 代表一台设备，$E=\{(v_i, v_j) \mid v_i$ 与 v_j 的距离小于 200 公里，$1 \leqslant i < j \leqslant 6\ \}$，如图 6.47 所示. 给顶点着色，一种颜色代表一个频率. 一种着色代表一种频率分配方案，因而所需的最少频率数等于 G 需要的最少颜色数. 不难看出，G 最少需要 3 种颜色. 图 6.47 中给出一种着色方案. 按照这个方案，设备 1 和 3 使用频率 1，设备 4 和 5 使用频率 2，设备 2 和 6 使用频率 3.

6.64 做图 $G=\langle V,E\rangle$，其中 $V=\{v_i \mid i=1,2,3,4,5,6\}$，每个 v_i 代表一名博士生，$E=\{(v_i, u_j) \mid A_i \cap A_j \neq \varnothing, 1 \leqslant i, j \leqslant 6, i \neq j\}$，如图 6.48 所示. v_i 与 v_j 的答辩会可以同时进行当且仅当 A_i 与 A_j 中没有共同的成员，这又当且仅当 v_i 与 v_j 不相邻. 因而，这个问题恰好对应 G 的点着色，着不同颜色的顶点所代表的博士生的答辩会必须安排在不同时间，需要的最少不同时间等于 G 需要的最少颜色数. 不难看出，G 需要的最少颜色数是 5，只有 v_4 和 v_5 可以着同一种颜色. 因此，这次论文答辩至少要安排 5 个不同的时间，其中 A_4 和 A_5 可以安排在同一时间.

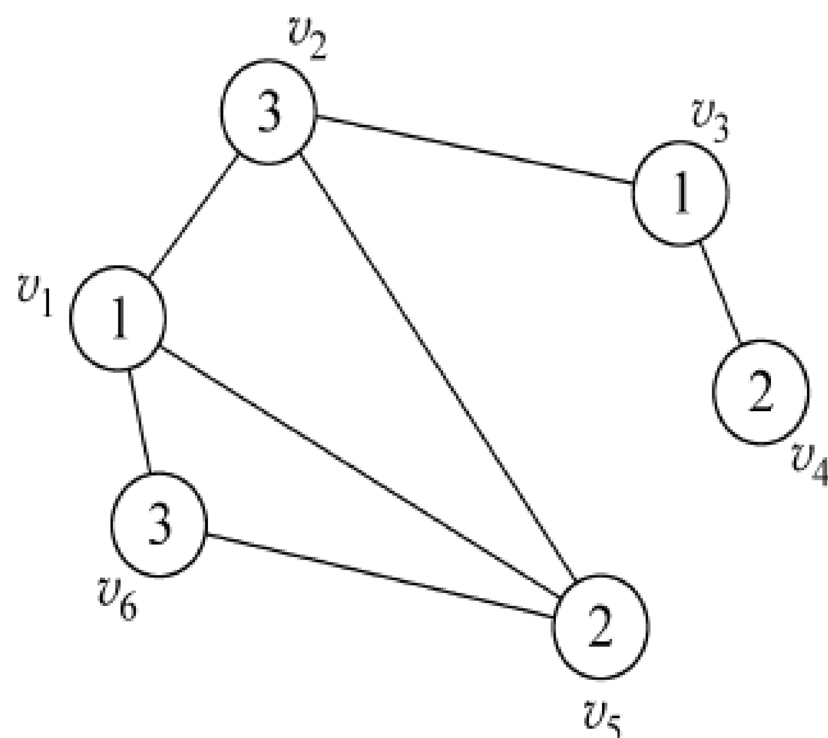


图 6.47

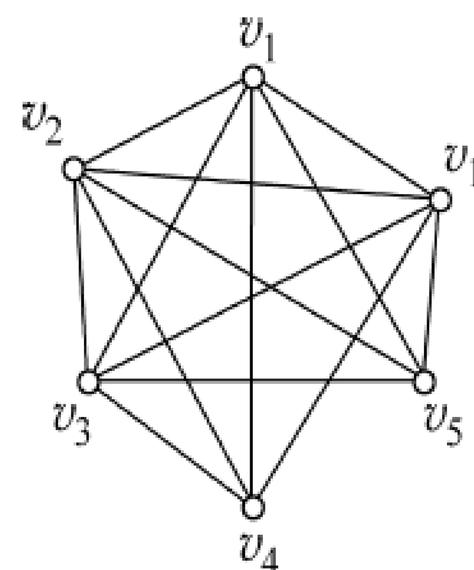


图 6.48

第 7 章 树及其应用

7.1 内容提要

1. 无向树

无向树 无向树、分支点、树叶、平凡树、森林.

定理 7.1(无向树的等价定义):

设 G 为 n 阶 m 条边的无向图,则下面各命题是等价的:

(1) G 连通不含初级回路和简单回路;

(2) G 的每对顶点之间有唯一的路径;

(3) G 连通且 $m=n-1$;

(4) G 中无初级和简单回路且 $m=n-1$;

(5) G 中无初级和简单回路,但在 G 的任何两个不相邻的顶点之间加一条新边,就得到唯一的一条初级回路;

(6) G 连通且每条边都是桥.

定理 7.2 非平凡无向树至少有两片树叶.

生成树:

相关概念 G 的生成树 T、T 的树枝、T 的弦、T 的余树、求生成树的算法.

定理 7.3 无向连通图都有生成树.

最小生成树 带权图中的最小生成树、求最小生成树的算法(Kruskal 算法).

2. 根树及其应用

相关概念 根树、树根、树叶、内点、分支点、树高、平凡根树、根子树、有序树.

家族树 祖先与后代、父亲与儿子、兄弟.

根树的分类:

(1) r 元树;

(2) r 元正则树;

(3) r 元完全正则树;

(4) r 元有序树;

(5) r 元有序正则树;

(6) r 元有序完全正则树.

最优树与最佳前缀码:

最优树 树叶带权的 2 元树 T、T 的权 $W(T)$、最优 2 元树.

哈夫曼算法　求最优2元树的算法.

最佳前缀码　长度为n的符号串、符号串的前缀、前缀码、2元前缀码、最佳前缀码、用哈夫曼算法求最佳前缀码.

波兰符号法与逆波兰符号法

对2元有序正则树的周游方法及应用：

(1) 中序行遍法(可还原算式)；

(2) 前序行遍法与波兰符号法；

(3) 后序行遍与逆波兰符号法.

7.2　习　　题

7.1　证明：树都是二部图.

7.2　证明：除平凡树外，树都不是欧拉图.

7.3　证明：除平凡树外，树都不是哈密顿图.

7.4　证明：树都是平面图.

7.5　哪些完全二部图是树?

7.6　无向完全图$K_n(n\geqslant 1)$中有树吗?

7.7　2,3,4,5阶非同构的无向树各有多少棵? 画出图形来.

7.8　树T有2个4度顶点,3个3度顶点,其余顶点全是树叶,问T有几片树叶?

7.9　无向树T有7片树叶,3个3度顶点,其余顶点的度数均为4,求T的阶数n.

7.10　无向树T中有n_i个顶点的度数为i,$i=2,3,\cdots,k$,其余顶点全为树叶,问T中有几片树叶?

7.11　下面两组数中,哪个(些)可以为无向树的度数列? 若是树的度数列,请画出两棵非同构的无向树.

(1) 1,1,2,3,3,4.

(2) 1,1,1,1,1,1,3,3,4.

7.12　设T为任意的无向树,问T的点连通度κ和边连通度λ分别为几?

7.13　图7.1所示无向图共有几棵非同构的生成树? 画出它们来.

7.14　图7.2所示无向图共有几棵非同构的生成树?

7.15　图7.3所示无向图共有几棵非同构的生成树?

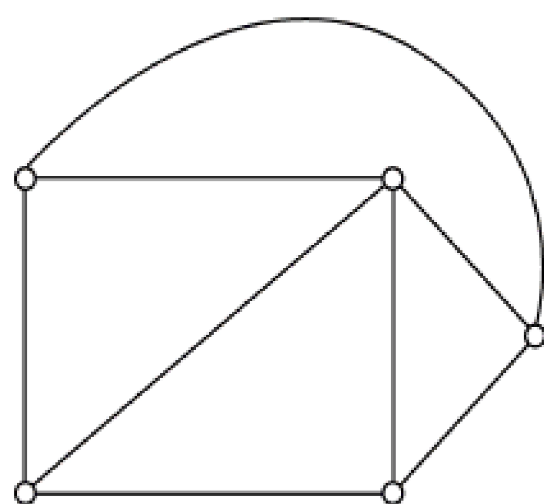


图　7.1

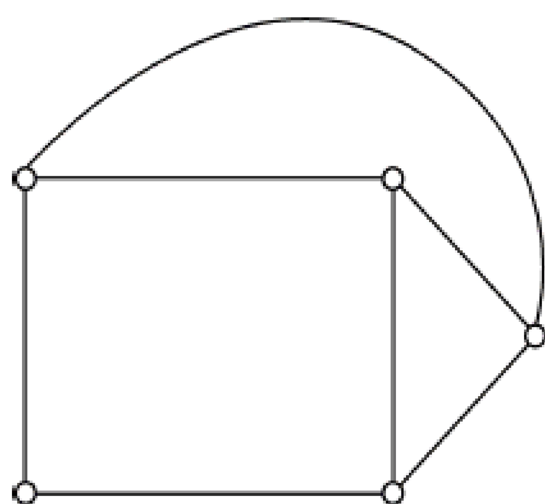


图　7.2

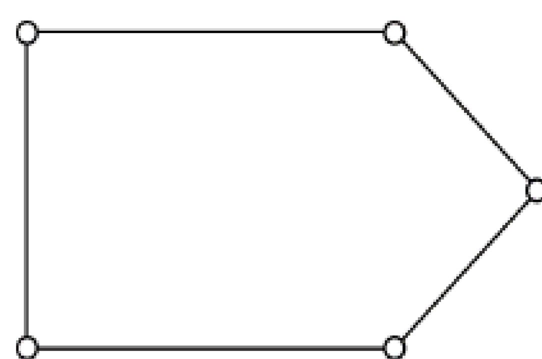
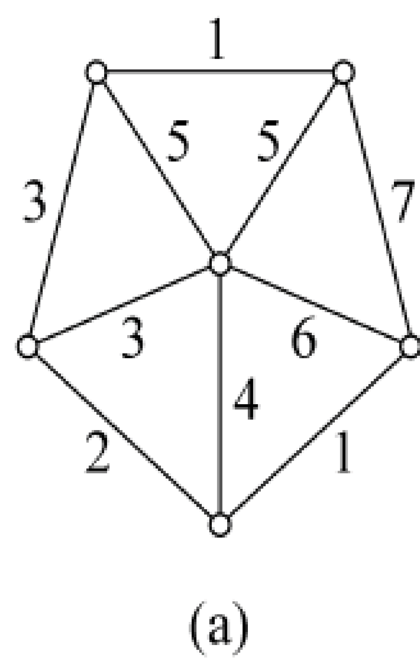


图　7.3

7.16　求图7.4所示两个带权图中的最小生成树,并计算它们的权.

7.17　求图7.5所示带权无向图的最小生成树,并计算它的权.



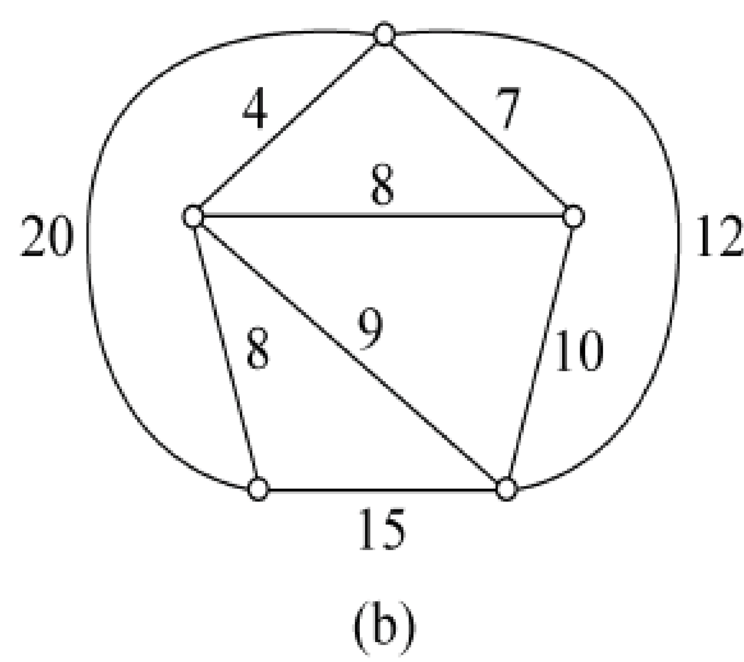


图 7.4

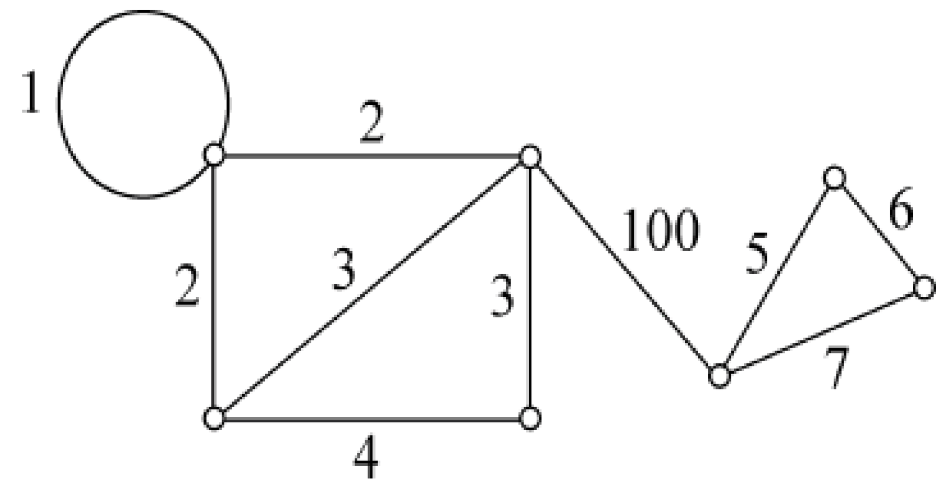


图 7.5

7.18 锅炉房到各楼可铺设暖气管道的线路及距离(m)如图7.6所示,试设计暖气管道的线路使得管道总长度最短.

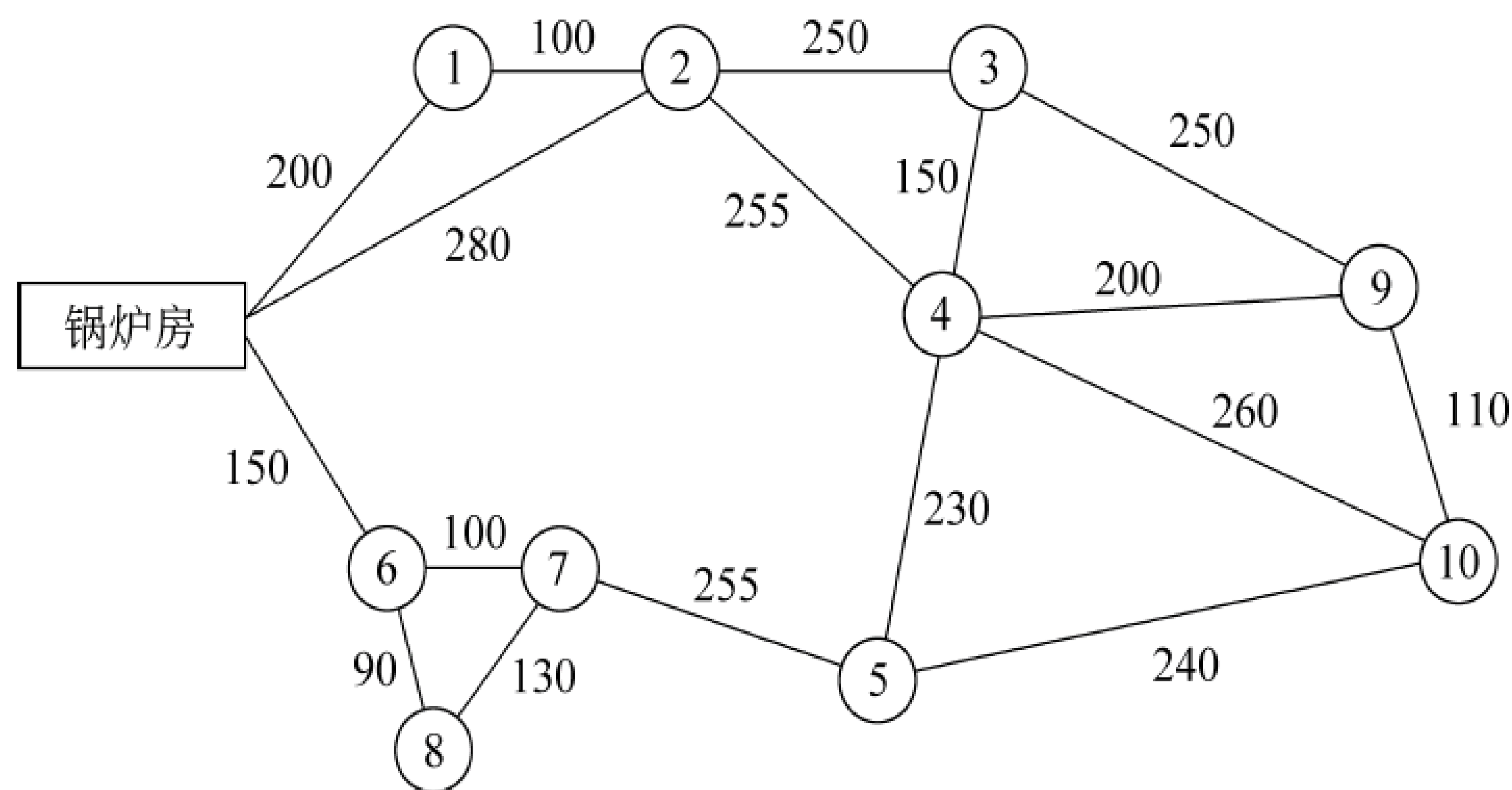


图 7.6

7.19 根据图7.7所示根树 T 回答以下问题.

(1) T 有几个内点?

(2) T 有几个分支点?

(3) T 有几片树叶?

(4) T 的高度 $h(T)$ 为几?

(5) T 是几元树?

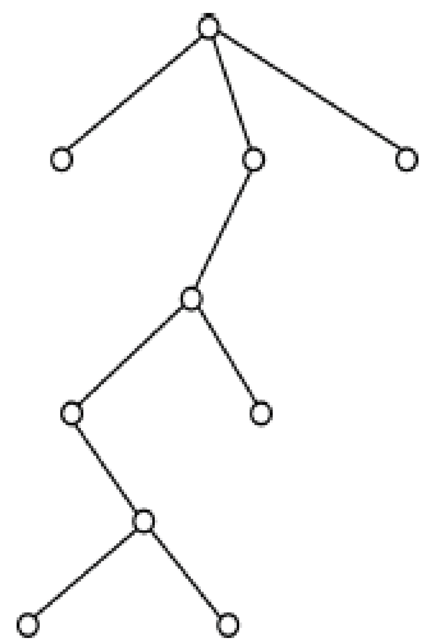


图 7.7

7.20 画出4阶所有非同构的根树,并指明它们都是几元树.

7.21 设 m 和 t 分别为2元正则树 T 的边数和树叶数,证明:$m=2(t-1)$,阶数 n 为奇数.

7.22 设 T 是 $r(r\geqslant 2)$ 元正则树,i 和 t 分别为分支点数和树叶数,证明:$t=(r-1)i+1$.

7.23 求高为 h 的2元完全正则树 T 的顶点数 n,边数 m 和树叶数 t.

7.24 求高为 h 的 r 元完全正则树 T 的树叶数 t 和分支点数 i.

7.25 画一棵带权为0.5,1,2,3.5,4,5,6.8,7.2,10的最优2元树,并计算它的权.

7.26 下面给出的符号串集合中,哪些是前缀码?

$B_1=\{0,10,110,1111\}$

$B_2=\{1,01,001,000\}$

$B_3=\{1,11,101,001,0011\}$

$B_4=\{b,c,aa,ac,aba,abb,abc\}$

$B_5=\{b,c,a,aa,ac,abc,abb,aba\}$

7.27　用图 7.8 中的 2 元树产生一个 2 元前缀码.

7.28　设 7 个字母在通信中出现的频率如下：

a：35%　　b：20%

c：15%　　d：10%

e：10%　　f：5%

g：5%

(1) 以频率(或乘 100)为权,求最优 2 元树.

(2) 利用所求 2 元树找出每个字母的前缀码.

(3) 传输 10 000 个按上述比例出现的字母需要传输多少个二进制数位？比用长度为 3 的等长码子传输省了多少个二进制数位？

7.29　图 7.9 所示的 2 元树表达一个算式.

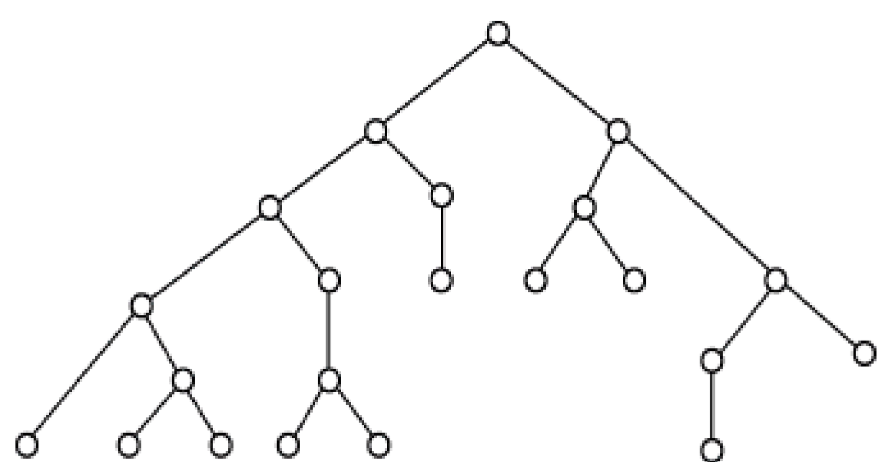


图　7.8

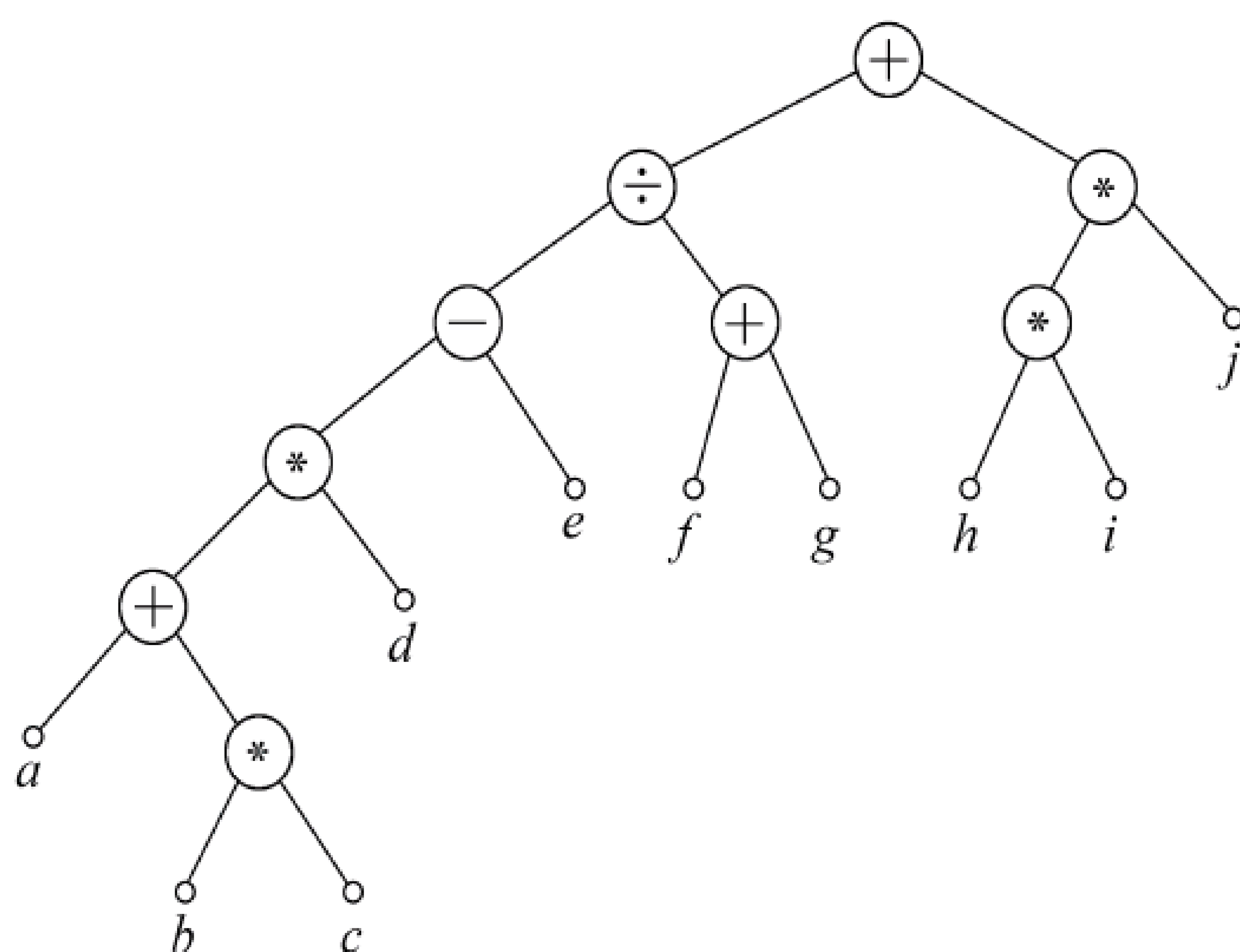


图　7.9

(1) 按中序行遍法写出算式.

(2) 用波兰符号法表示算式.

(3) 用逆波兰符号法表示算式.

7.3　习题解答与分析

7.1　树是连通无回路的无向图,这里所说回路是指初级或简单回路,因而树中若有回路,一定是复杂回路,在其上的每条边均出现偶数次,所以树中没有奇数长度的回路.由二部图的判别定理可知树都是二部图.

7.2　从不同的角度有多种方法证明非平凡树不是欧拉图,比如：

方法 1　利用 T 中有奇度顶点.设 T 为一棵非平凡的无向树,由定理 7.2 可知,T 至少有两片树叶,因而 T 有奇度顶点.由无向欧拉图的判别定理可知,T 不是欧拉图.

方法 2　利用 T 中有割边(桥)证明.由定理 7.1 可知,T 的每条边都是桥,再由题 6.43 可知,非平凡树 T 不是欧拉图.

7.3　若 T 是 2 阶树,同构意义下,T 为 K_2,K_2 显然不是哈密顿图.

为了证明 $n(n\geqslant 3)$阶树不是哈密顿图,先证明下面命题.

命题　在无向树 T 中,非树叶顶点都是割点.

证明　只有阶数 $n\geqslant 3$ 的树中才有非树叶顶点.设 u 为 T 中非树叶顶点,u 与 v 和 w 相邻,设 $e_1=(v,u)$,$e_2=(u,w)$,则 e_1,e_2 均为桥,于是 $p(T-u)\geqslant 2$,故 u 为割点.

由此命题可知,阶数 $n\geqslant 3$ 的树 T 中有割点,由主教材中定理6.10的推论可知,T 不是哈密顿图.

7.4　设 T 为任何一棵树,则 T 中既没有简单回路,也没有初级回路.而与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的图均有初级和简单回路,因而 T 中既没有与 K_5 同胚的子图,也无与 $K_{3,3}$ 同胚的子图,由库拉图斯基定理可知,T 是平面图.

T 是特殊的平面图,T 只有一个外部面,无任何内部面.外部面 R_0 的边界是由所有边构成的复杂回路组成(每条边在回路中恰好出现两次).

7.5　完全二部图 $K_{1,r}(r\geqslant 1)$ 和 $K_{s,1}(s\geqslant 1)$ 为树.在 $K_{r,s}$ 中,若 $r\geqslant 2$ 且 $s\geqslant 2$,则 $K_{r,s}$ 中必含圈,所以,当 $r\geqslant 2$,$s\geqslant 2$ 时,$K_{r,s}$ 不是树.

以 $K_{1,r}$ 为例说明这些树的特点.设 $K_{1,r}$ 的互补顶点子集为 V_1 和 V_2,且 $V_1=\{v\}$,$V_2=\{u_1,u_2,\cdots,u_r\}$,其中,$d(v)=r$,$d(u_i)=1$,$i=1,2,\cdots,r$,即 u_i 全是树叶,称这样的树为星形图,v 为形心.图7.10(a)所示为 $K_{1,4}$,图7.10(b)所示为 $K_{1,7}$.

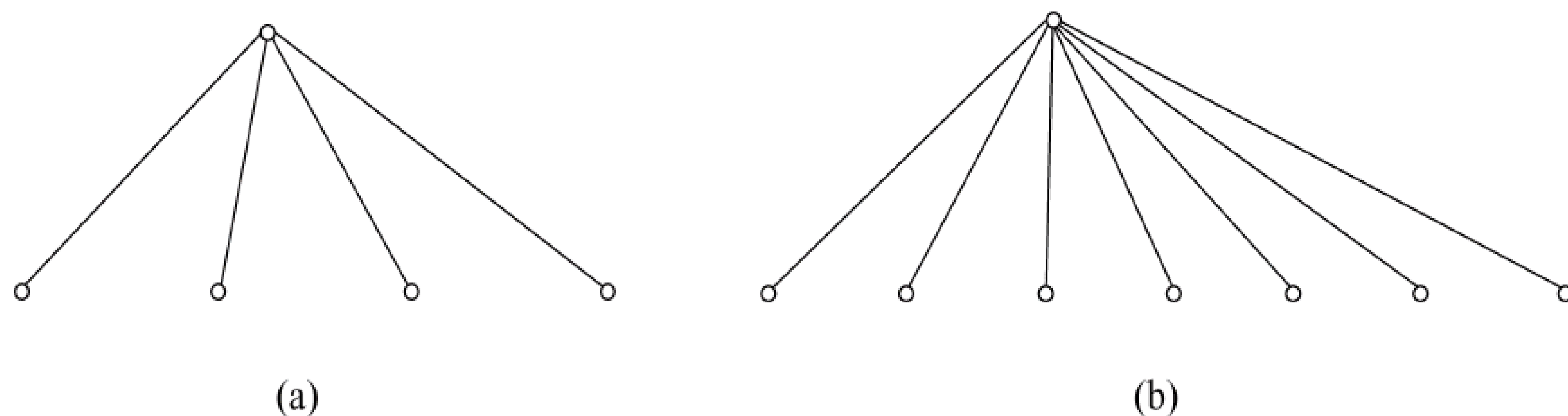


图　7.10

7.6　无向完全图 $K_n(n\geqslant 1)$ 中只有 K_1 与 K_2 是树,K_1 是平凡树.

7.7　给定阶数 n,求所有非同构的 n 阶无向树的步骤如下:

(1) 由树的性质可知,树的边数 $m=n-1$;

(2) 由握手定理可知,$\sum_{i=1}^{n}d(v_i)=2m=2n-2$;

(3) 将 $2n-2$ 度分给 n 个顶点,且每份均 $\geqslant 1$,求出所有的不同的分配方案,由不同的方案产生的树当然非同构;

(4) 注意有的方案也可能生成多棵非同构的无向树.

根据以上步骤可得:

$n=2$ 时,度数列为1,1,产生一棵树,如图7.11(a)所示.

$n=3$ 时,度数列为1,1,2,产生一棵树,如图7.11(b)所示.

$n=4$ 时,度数列为1,1,1,3和1,1,2,2,产生两棵非同构的树,如图7.11(c)、(d)所示.

$n=5$ 时,度数列为1,1,1,1,4和1,1,1,2,3,以及1,1,2,2,2,产生3棵非同构的树,见图7.11(e)、(f)、(g)所示.

在以上7棵树中,每种度数方案都产生一棵非同构的树.问:度数列为1,1,1,1,2,2,2,4的8阶树共有几棵非同构的树?

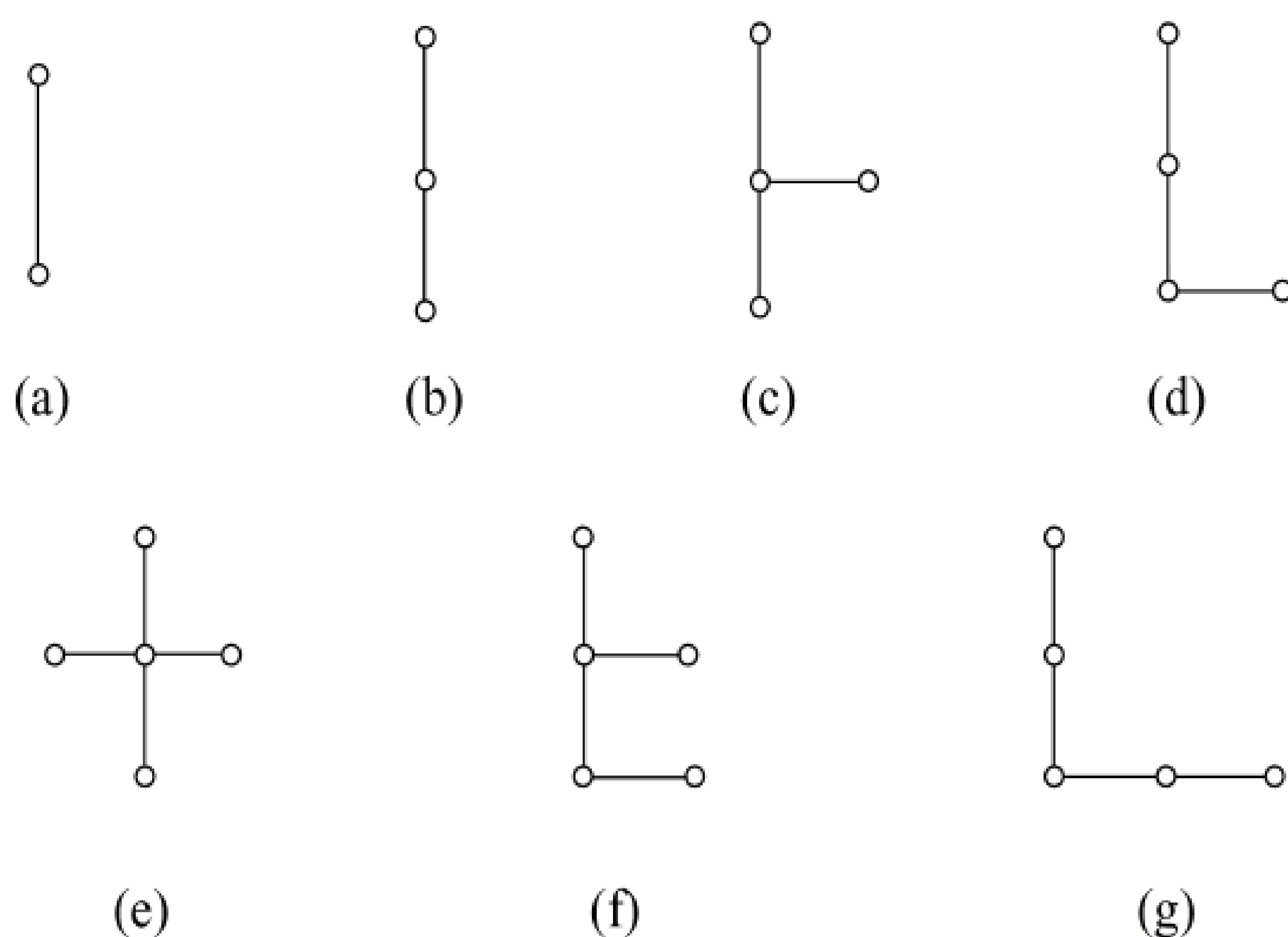

(a) (b) (c) (d)
(e) (f) (g)

图 7.11

不难看出，4 度顶点和一个 2 度顶点相邻，和两个 2 度顶点相邻，以及和 3 个 2 度顶点相邻所产生的树是非同构的，所产生的 3 棵非同构的树如图 7.12(a)、(b)、(c)所示.

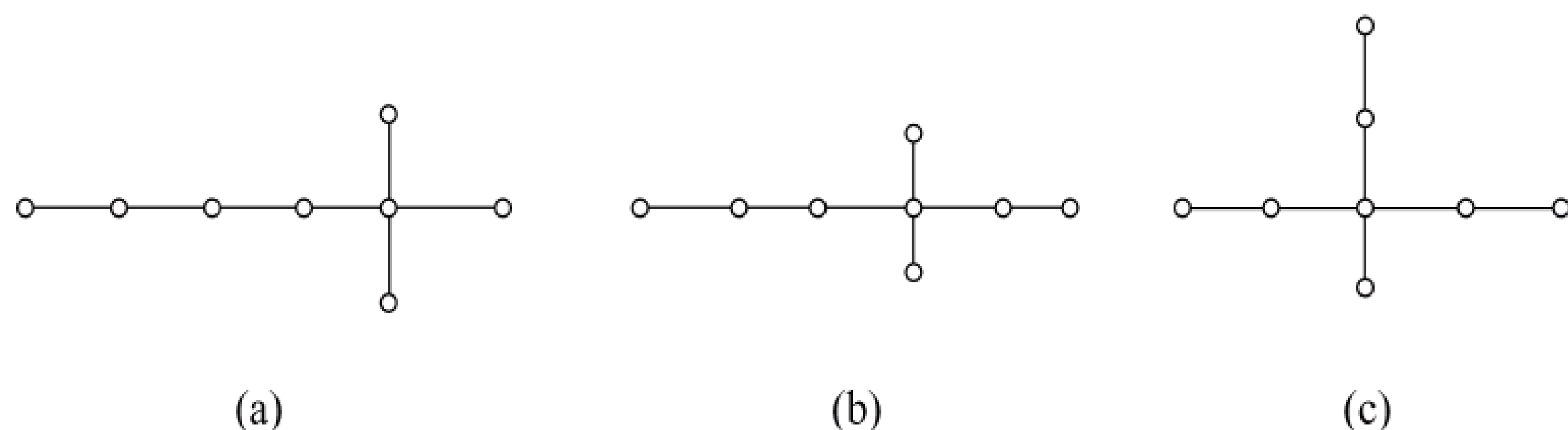

(a) (b) (c)

图 7.12

7.8 T 共有 9 片树叶.

分析 解本题时应该应用树的阶数 n 与边数 m 的关系，即 $m=n-1$，以及握手定理.

设 T 有 t 片树叶，则 T 的阶数 $n=2+3+t=5+t$，于是边数 $m=4+t$，应用握手定理得

$$2m=8+2t=\sum d(v_i)=4\times 2+3\times 3+t$$

解出 $t=9$，于是 T 的度数列应为

$$1,1,1,1,1,1,1,1,1,3,3,3,4,4$$

7.9 T 的阶数 $n=11$.

分析 依然应用握手定理和树的性质 $m=n-1$，m 为边数.

设 4 度顶点的个数为 x，则阶数 $n=7+3+x=10+x$，于是边数 $m=9+x$，由握手定理得

$$2m=18+2x=\sum d(v_i)=7\times 1+3\times 3+4x=16+4x$$

解出 $x=1$，即 T 有 1 个 4 度顶点，阶数 $n=10+1=11$. T 的度数列为：

$$1,1,1,1,1,1,1,3,3,3,4$$

7.10 T 有 $\sum\limits_{i=3}^{k}(i-2)n_i+2$ 片树叶.

分析 用握手定理及树的性质解答本题.

设 T 有 t 片树叶，则 T 的阶数 $n=\sum\limits_{i=2}^{k}n_i+t$，于是边数 $m=n-1=\sum\limits_{i=2}^{k}n_i+t-1$，由握手定理得

$$2m=\sum_{i=2}^{k}2n_i+2t-2=\sum d(v_i)=\sum_{i=2}^{k}in_i+t$$

解得

$$t=\sum_{i=2}^{k}in_i-\sum_{i=2}^{k}2n_i+2$$

$$=\sum_{i=2}^{k}(i-2)n_i+2=\sum_{i=3}^{k}(i-2)n_i+2$$

7.11 (1)中各数不能组成无向树的度数列;

(2)中各数可以组成无向树的度数列.

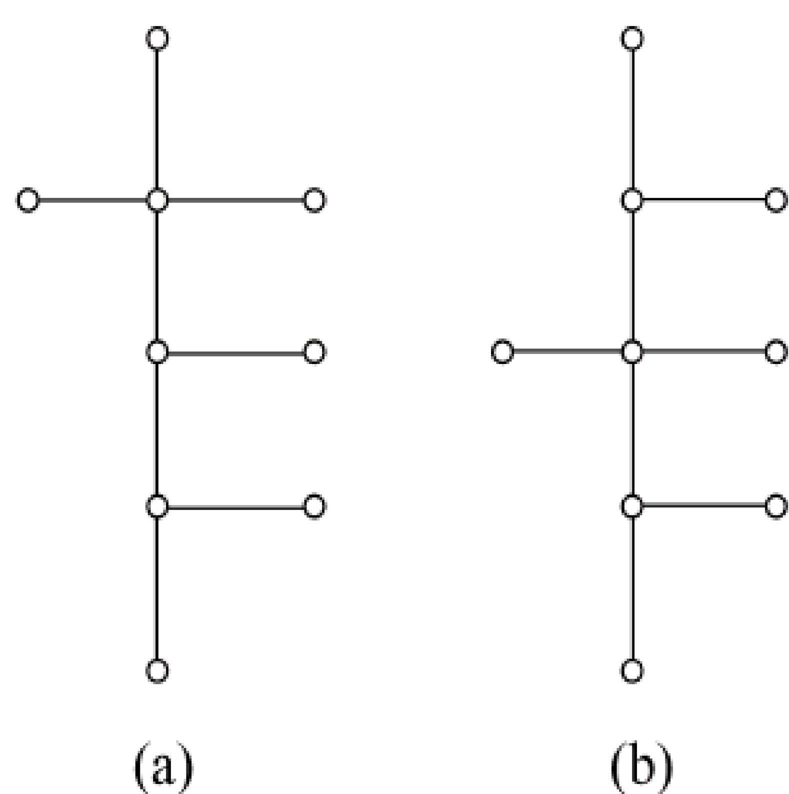


图 7.13

分析 (1)论证1,1,2,3,3,4不能成为树的度数列.用归谬法证明.若它们能成为某无向树的度数列,则T的阶数$n=6$,边数$m=n-1=5$.由握手定理应有:

$$2m=10=\sum d(v_i)=1\times 2+2+3\times 2+4=14$$

10=14是个矛盾.

(2)图7.13(a)、(b)中的树均以(2)中的数为度数列,且这两棵树是非同构的.

7.12 当T为平凡树时,$\kappa=\lambda=0$;当T为非凡平树时,$\kappa=\lambda=1$.

分析 当T为平凡树时,T为完全图K_1,而完全图K_n的点连通κ与边连通λ都等于$n-1$,所以,$\kappa=\lambda=0$.

当T为非平凡树时,又分两种情况讨论.

① T是2阶树,此时T为K_2,所以$\kappa=\lambda=1$.

② 当T的阶数$n\geqslant 3$时,T一定有非树叶顶点,非树叶顶点都是割点,所以$\kappa=1$,又T的每条边都是桥,所以$\lambda=1$.

7.13 图7.1所示无向图G共有3棵非同构生成树.

分析 图7.1所示图为5阶无向连通简单图,由定理7.3可知G一定有生成树.5阶非同构的树共有3棵,它们的度数列分别为

① 1,1,1,1,4;

② 1,1,1,2,3;

③ 1,1,2,2,2.

于是G最多有3棵非同构的生成树.经过观察发现G确实有3棵非同构的生成树.图7.14中给出了这3棵生成树,其中图7.14(a)所示为度数列①所对应,图7.14(b)所示为度数列②所对应,图7.14(c)所示为度数列③所对应.

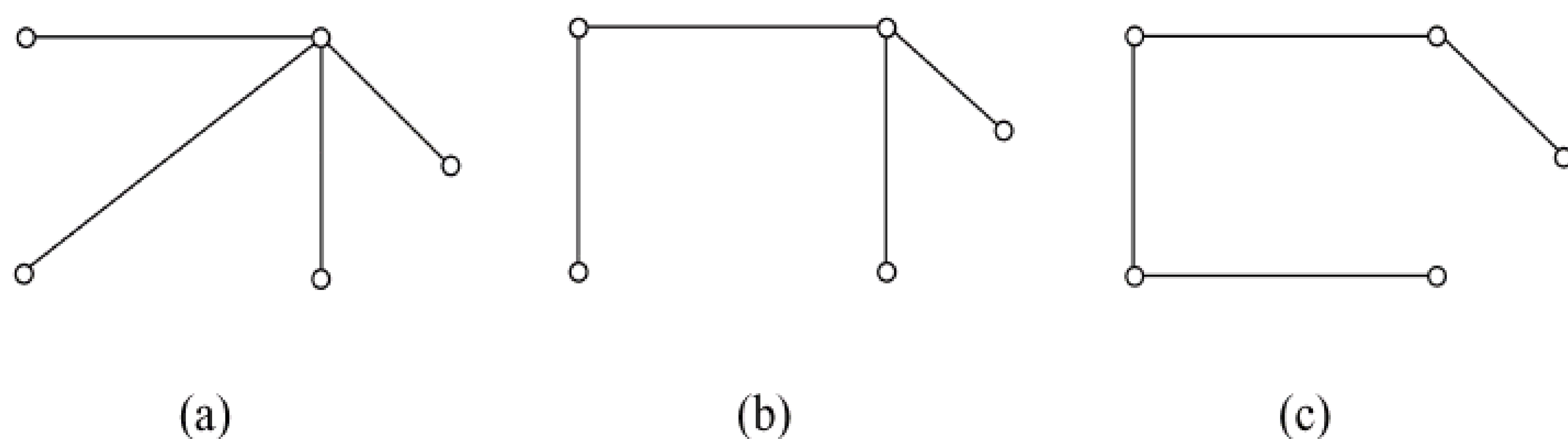


图 7.14

7.14　图 7.2 所示的无向图共有 2 棵非同构的生成树.

分析　图 7.2 所示无向图 G 也是连通图,因而它一定有生成树. 与题 7.13 类似讨论可知,它也最多有 3 棵非同构生成树,但因为最大度 $\Delta(G)=3$,因而它不可有对应度数列为 1,1,1,1,4 的生成树,但它有度数列为 1,1,1,2,3 和 1,1,2,2,2 的生成树,见图 7.15(a)、(b)所示的 5 阶树.

7.15　图 7.3 所示图 G 只有一棵非同构的生成树.

分析　同题 7.13 和题 7.14 类似分析,该图 G 连通,所以一定有生成树,但因为 $\Delta(G)=2$,所以,G 不可能有对应度数列 1,1,1,1,4 和 1,1,1,2,3 的生成树,它只有度数列为 1,1,2,2,2 的生成树,见图 7.16 所示.

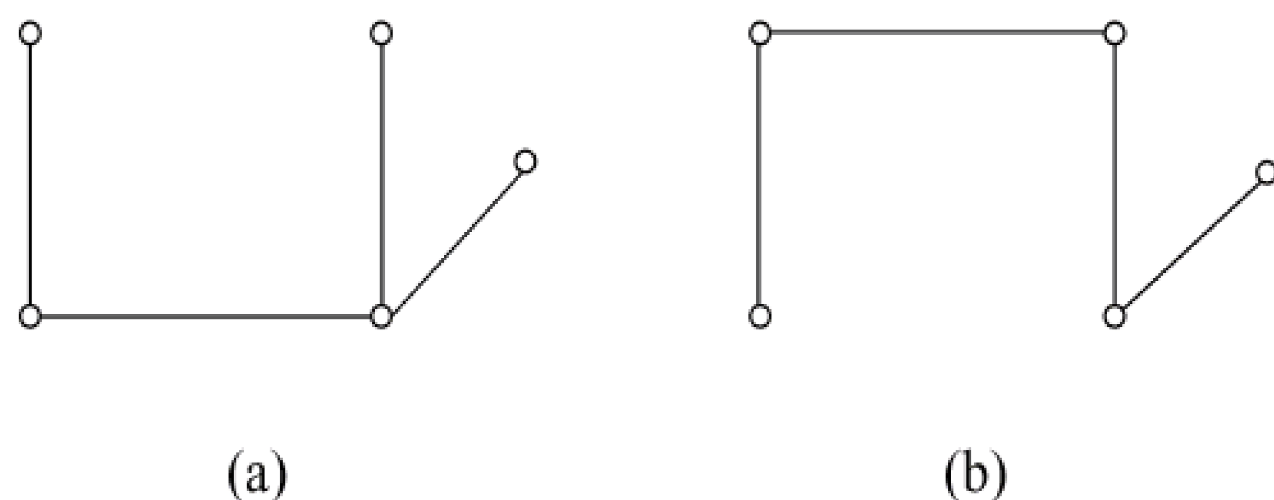


图　7.15

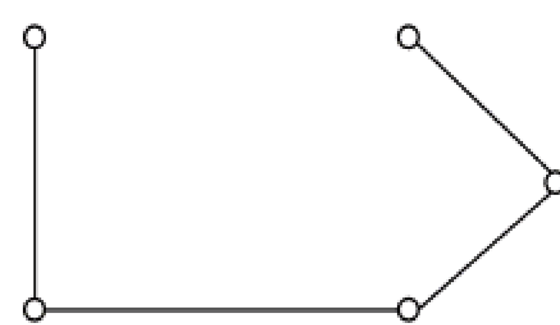


图　7.16

再讨论一下如下的问题:将图 7.3 所示 5 阶无向图顶点标定,见图 7.17(a)所示的图,问:G 有多少棵不同的生成树?这里所谓不同生成树,是指两棵生成树 T_1 与 T_2 中只要有不同边就认为是不同的,也就是说不是同构意义上的. 易知图 7.17(a)所示的图有 5 棵不同的生成树(当然它们彼此间都同构),见图 7.17(b)～(f)所示.

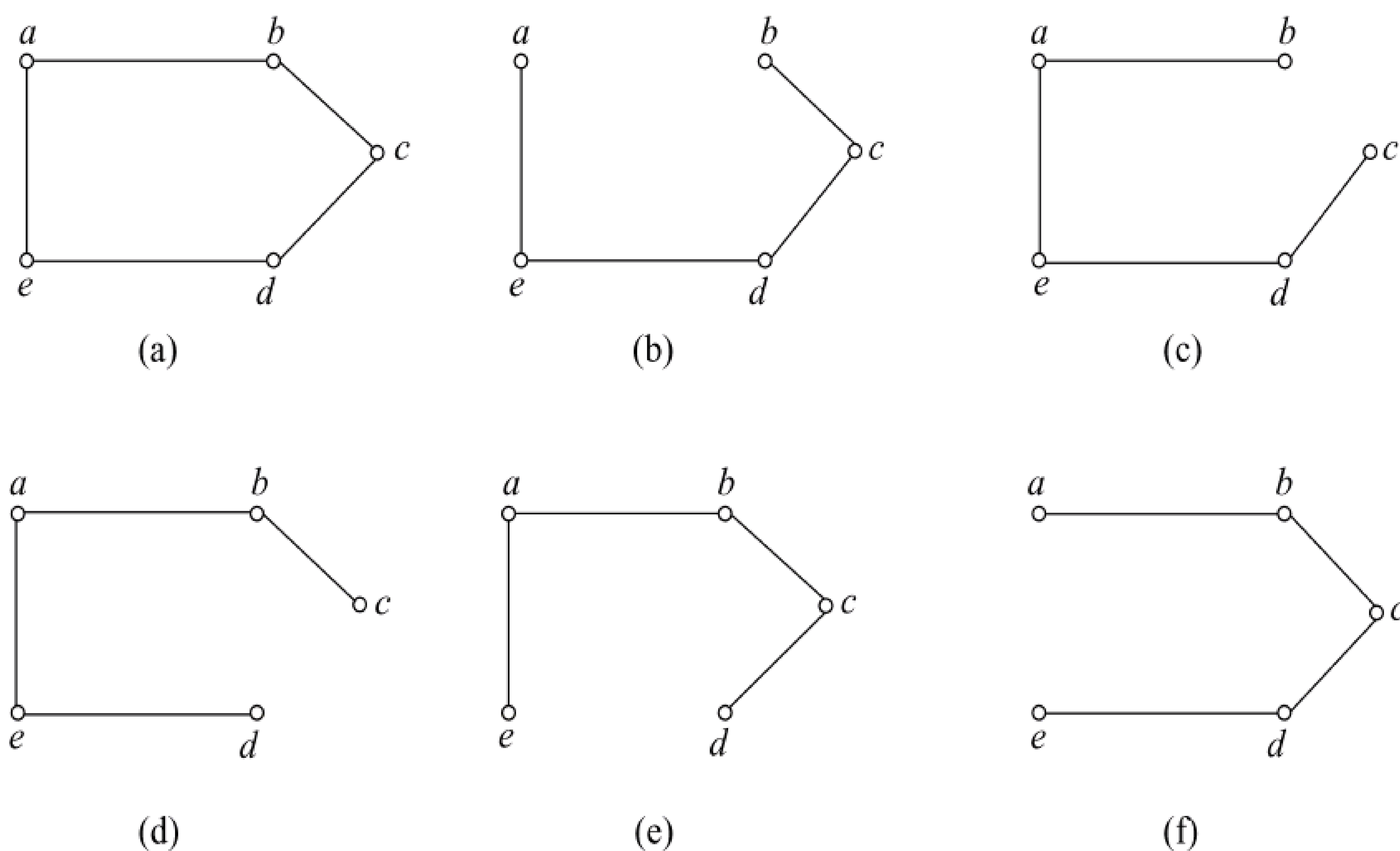


图　7.17

7.16　用避圈法容易求出图 7.4 所示两个图的最小生成树,它们分别为图 7.18(a)、(b)所示,它们的权分别为 10 和 28.

7.17　图 7.5 所示图的最小生成树如图 7.19 所示,其权为 118.

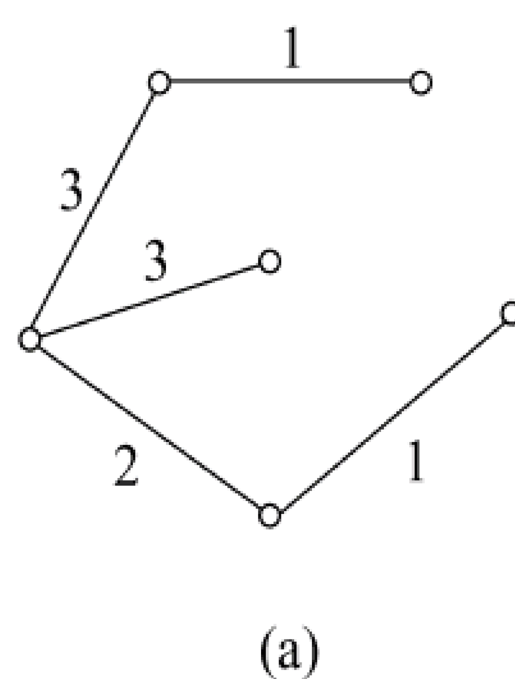
7.18　按照图 7.6 的最小生成树铺设管道,其总长度最短. 记锅炉房为顶点 0,用避圈法,依次取边:

$$(6,8),(6,7),(1,2),(9,10),(0,6),(3,4),(4,9),(0,1),(4,5),(2,3).$$

总长度为

$$90+100+100+110+150+150+200+200+230+250=1580(\mathrm{m})$$

7.19 将图7.7所示根树标定顶点,所得树如图7.20所示.



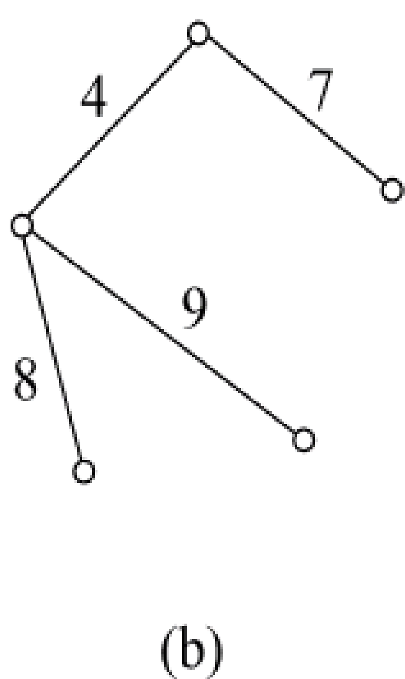


图 7.18

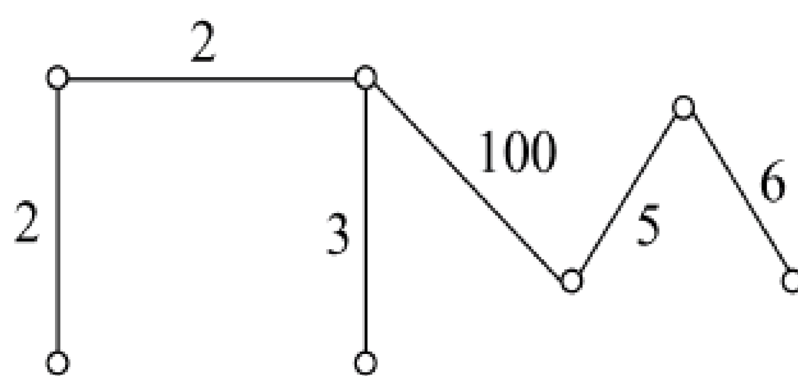


图 7.19

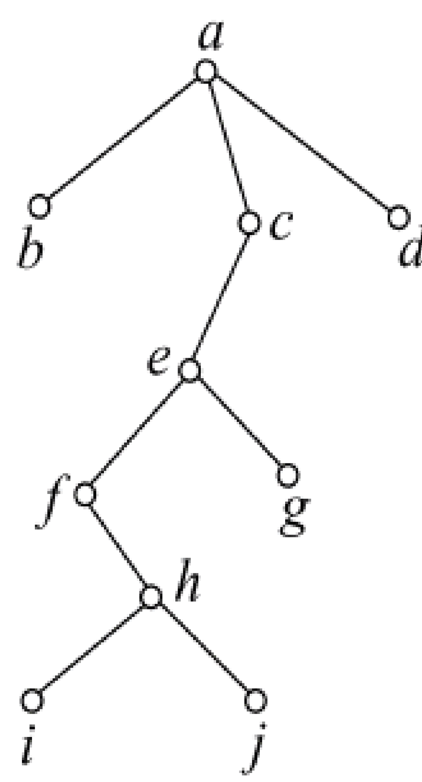


图 7.20

(1) T 有4个内点,它们分别是 c、e、f、h.

(2) T 有5个分支点:a、c、e、f、h,其中 a 为树根.

(3) T 有5片树叶:b、d、g、i、j.

(4) T 的高度 $h(T)=5$,在树叶 i、j 处达到.

(5) T 是3元树.

7.20 4阶非同构的根树共有4棵.

分析 将有向图 D 的所有边的箭头全去掉,即将有向边全变成无向边,所得无向图 G 称为 D 的**基图**.设两棵同阶根树为 T_1、T_2,它们的基图为 G_1 与 G_2.若 $G_1\not\cong G_2$,则 $T_1\not\cong T_2$,但当 $G_1\cong G_2$ 时,T_1 与 T_2 不一定同构.对于本题来说,$n=4$,应先求4阶非同构的无向树,由题7.7可知,4阶非同构的树只有两棵,见图7.21(a)、(b)所示.由图7.21(a)中树派生两棵非同构的根树,其中一棵是高为1的3元树,见图7.21(c)所示;另一棵是高为2的2元树,见图7.21(d)所示.由图7.21(b)派生两个非同构的根树,其中一棵是高为3的1元树,见图7.21(e)所示,另一棵是高为2的2元树,见图7.21(f)所示.

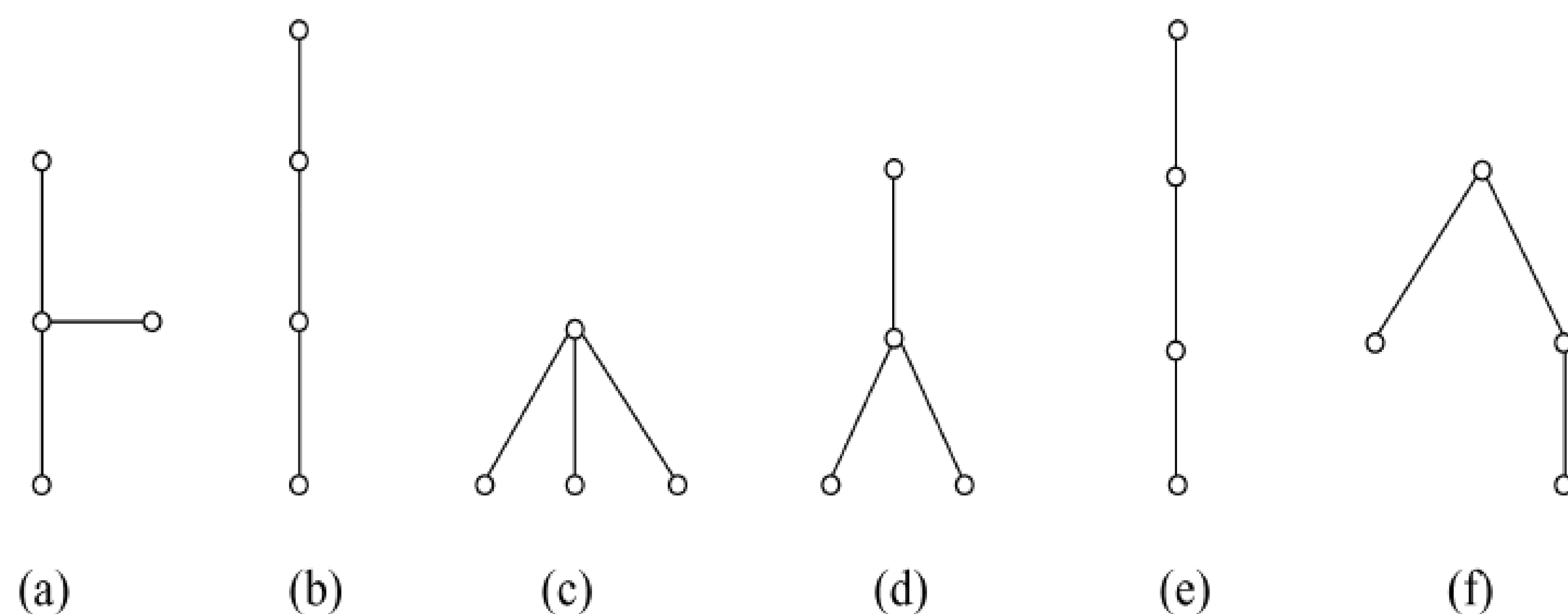


图 7.21

7.21 m 和 t 分别为2元正则树 T 的边数和树叶数,再令 n 和 i 分别为 T 的阶数和分支点数.

方法1 用定义直接证明.由定义可得

① $n=i+t$;

② $m=2i$ (2元正则树定义);

③ $n=m+1$ （树的性质）.

由①和③可得 $i+t=m+1 \Rightarrow i=m+1-t$，代入②可得

$$m = 2m + 2 - 2t \Rightarrow m = 2t - 2 = 2(t-1)$$

方法 2 对分支点数 i 做归纳法.

① 当 $i=1$ 时，此时 2 元正则树由树根（分支点）和两片树叶组成，具有 2 条边，所以 $m=2=2(2-1)=2(t-1)$，即 $i=1$ 时结论为真.

② 设 $i=k(k\geqslant 1)$ 时结论为真，证明 $i=k+1$ 时结论也为真. 分支点数为 $k+1$ 的 2 元正则树 T 一定存在分支点 u，具有两个儿子都是树叶，设树叶分别为 v_1、v_2，并设 T 的边数和树叶数分别为 m 和 t. 令 $T'=T-\{v_1,v_2\}$，所得树 T' 具有 k 个分支点，边数 $m'=m-2$，树叶数 $t'=t-2+1=t-1$（注意，在 T' 中 u 成了树叶）. 由归纳假设可知

$$\begin{aligned} & m' = 2(t'-1) \\ \Rightarrow & m - 2 = 2(t-1-1) \\ \Rightarrow & m = 2t - 4 + 2 \\ \Rightarrow & m = 2t - 2 = 2(t-1) \end{aligned}$$

在以上两种方法的证明中，还是方法 1 较为方便.

由于 $n=m+1=2(t-1)+1$，故 n 必为奇数.

7.22 与题 7.21 类似，也可以用定义或归纳法证明.

方法 1 用定义直接证明.

① T 的边数 $m=ir$（r 元正则树的定义）；

② T 的阶数 $n=i+t$；

③ $m=n-1=i+t-1$.

由①和③，得 $ir=i+t-1 \Rightarrow t=(r-1)i+1$.

方法 2 对分支点数 i 做归纳法.

① $i=1$ 时，T 由树根和 r 片树叶构造，即

$$t = r = (r-1)\times 1 + 1 = (r-1)i + 1$$

② 设 $i=k$ 时，结论为真，证明 $i=k+1$ 时，结论也为真.

设 r 元正则树 T 有 $(k+1)$ 个分支点，边数为 m，树叶数为 t.

在 T 中必存在顶点 u，它的儿子们全是树叶，不妨设 u 的儿子为 $v_1,v_2,\cdots,v_r$. 考虑

$$T' = T - \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$$

则 T' 有 k 个分支点，树叶数 $t'=t-r+1$（在 T' 中 u 也为树叶了）. 由归纳假设可知

$$t' = (r-1)k + 1$$

将 $t'=t-r+1$ 代入上式得

$$\begin{aligned} & t - r + 1 = (r-1)k + 1 \\ \Rightarrow & t = (r-1)k + (r-1) + 1 \\ & \quad = (r-1)(k+1) + 1 \end{aligned}$$

7.23 高为 $h(h\geqslant 0)$ 的 2 元完全正则树 T 中，阶数 $n=2^{h+1}-1$，$m=2(2^h-1)$，树叶数 $t=2^h$，分支点数 $i=2^h-1$.

分析 用公比为 $q(q\neq 1)$ 的等比级数前 $s+1$ 项之和的计算公式 $1+q+q^2+\cdots+q^s=(1-q^{s+1})/(1-q)$ 来先计算出高为 h 的 2 元完全正则树 T 的阶数 n.

易知,在 T 中第0层、第1层、…、第 h 层上的顶点数分别为 $1,2,2^2,\cdots,2^{h-1},2^h$,于是

$$n=1+2+2^2+\cdots+2^{h-1}+2^h$$
$$=(1-2^{h+1})/(1-2)=2^{h+1}-1$$

因而

$$m=n-1=2^{h+1}-1-1=2^{h+1}-2=2(2^h-1)$$

又,第 h 层上的顶点全是树叶,其他层上无树叶,所以,$t=2^h$,分支点数 $i=n-t=2^h-1$.

7.24　树叶数 $t=r^h$,分支点数 $i=(r^h-1)/(r-1)$.

分析　与题7.23类似讨论.

在高为 h 的 $r(r\geqslant 2)$ 元完全正则树 T 中,在0层、1层、…、h 层上的顶点数分别为 $1,r,r^2,\cdots,r^h$,于是

$$\text{阶数}\ n=1+r+r^2+\cdots+r^h=(1-r^{h+1})/(1-r)$$
$$=(r^{h+1}-1)/(r-1)$$

树叶数 $t=r^h$,于是

$$\text{分支点数}\ i=n-t=(r^{h+1}-1)/(r-1)-r^h$$
$$=(r^h-1)/(r-1)$$

7.25　画出的最优树如图7.22所示,其权 $W(T)=114.8$.

7.26　B_1、B_2、B_4 是前缀码. 而 B_3 和 B_5 不是前缀码.

分析　在 B_3 中,1是11和101的前缀,001是0011的前缀,所以 B_3 不是前缀码.

在 B_5 中,a 是 aa 和 ac 的前缀,所以 B_5 也不是前缀码.

7.27　在每个分支点引出的2条边上,左边的标0,右边的标1. 当只有一条边时标0. 这样在每片树叶得到的0-1串组成一个前缀码,如图7.23所示. 得到的前缀码是

$$\{010,100,101,111,0000,1100,00010,00011,00100,00101\}$$

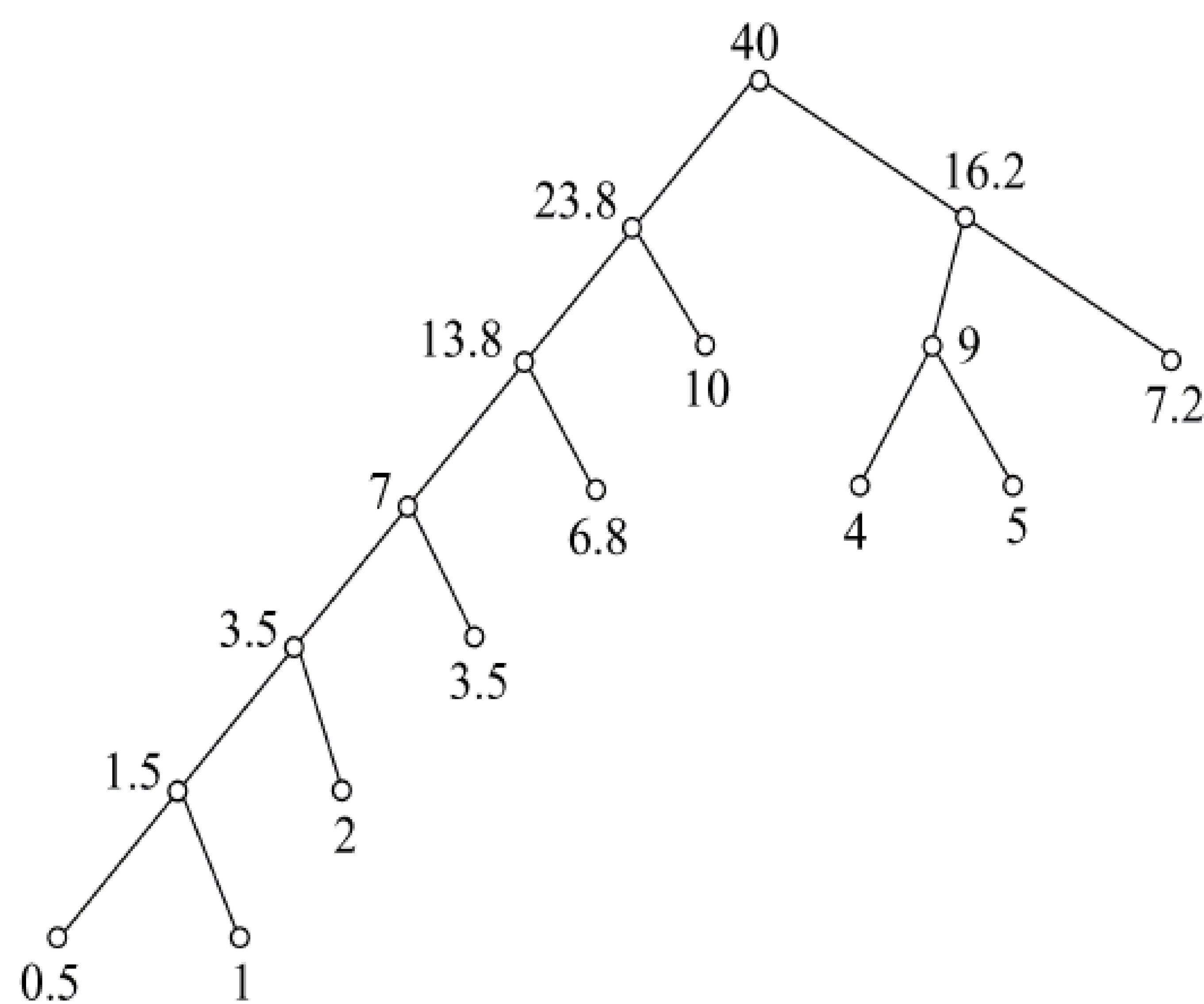


图　7.22

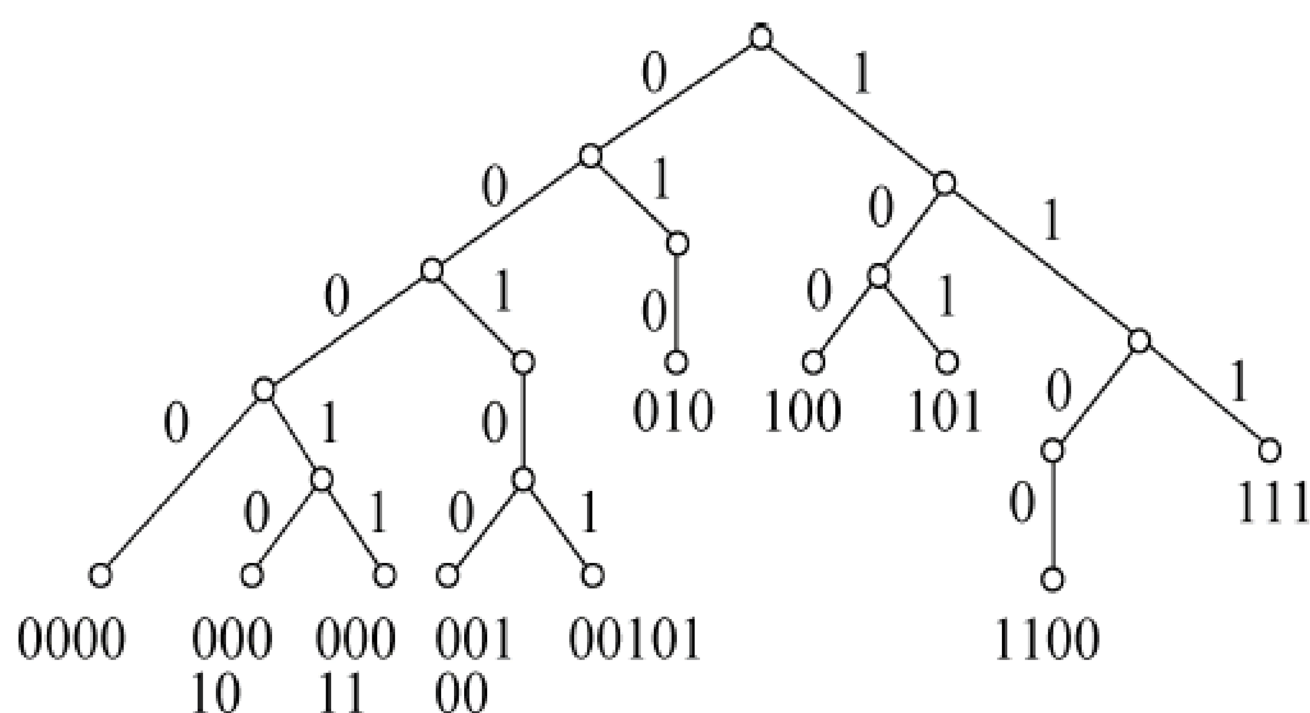


图　7.23

分析　若2元树不是正则的,当从分支点只引出一条边时,可以标0,也可以标1. 例如,将图7.23中所有这样的边都标1,得到前缀码

$$\{011,100,101,111,0000,1101,00010,00011,00110,00111\}$$

当然也可以有的标0,另一些标1,得到不同的前缀码.

7.28　(1) 最优2元树如图7.24所示.

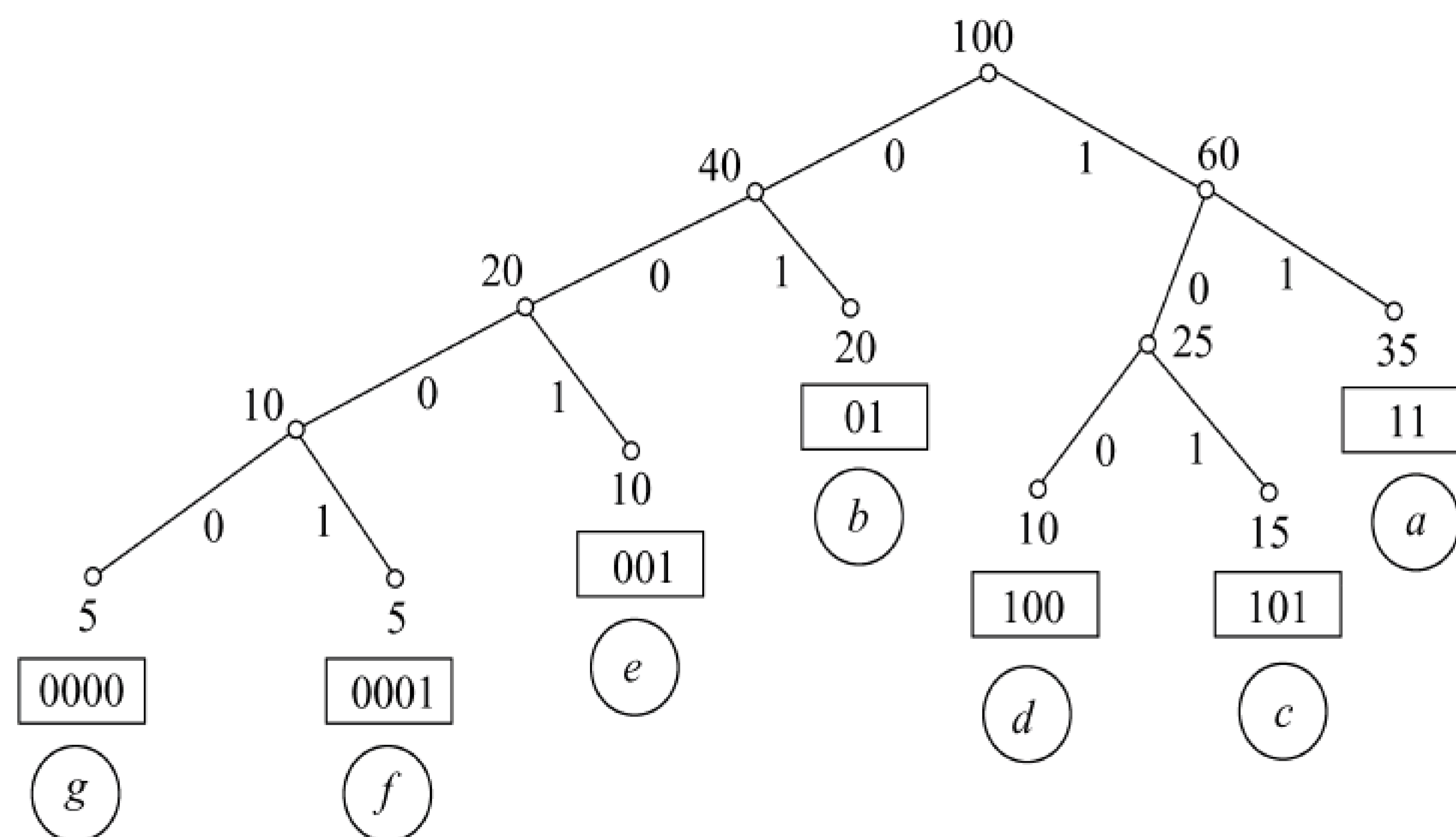


图 7.24

(2) a—11, b—01, c—101, d—100, e—001, f—0001, g—0000.

(3) $W(T)=255$,这说明传输 100 个按给定的比例出现的 7 个字母 $a\sim g$ 需要 255 个二进制数位,传输 10 000 个需要 25 500 个二进制数位. 而用等长的二进制数位传输,如用 000 传 a,001 传 b,…,110 传 g,传 10 000 个需要 30 000 个二进制数位. 这样一来用前缀码传输,比用等长码传输节省了 4500 个二进制数位.

7.29 (1) 按中序行遍法还原算式.

$$((((a+(b*c))*d)-e)\div(f+g))+((h*i)*j)$$

根据先乘除后加减的运算法则,上式可省去一些括号,变为

$$(((a+b*c)*d-e)\div(f+g))+h*i*j$$

(2) 用波兰符号法表示算式(前序行遍法访问):

$$+\div-*+a*bcde+fg**hij$$

(3) 用逆波兰等号法表示算式(后序行遍法访问):

$$abc*+d*e-fg+\div hi*j*+$$

第 8 章 组合计数基础

8.1 内容提要

1. 基本计数规则

加法法则 事件 A 有 m 种产生方式,事件 B 有 n 种产生方式,当 A 与 B 产生的方式不重叠时,“事件 A 或 B”有 $m+n$ 种产生方式.

加法法则使用的条件是事件 A 与 B 产生的方式不能重叠.

加法法则的推广 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,它们的产生方式分别有 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 种,当其中任何两个事件产生的方式都不重叠时,事件“A_1 或 A_2 或 $\cdots$ 或 A_n”有 $p_1+p_2+\cdots+p_n$ 种产生的方式.

乘法法则 事件 A 有 m 种产生方式,事件 B 有 n 种产生方式,当 A 与 B 产生的方式彼此独立时,“事件 A 与 B”有 mn 种产生方式.

乘法法则使用的条件是事件 A 与 B 产生的方式彼此独立.

乘法法则的推广 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,它们的产生方式分别有 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 种,当其中任何两个事件产生的方式都彼此独立时,事件“A_1 与 A_2 与 $\cdots$ 与 A_n”有 $p_1p_2\cdots p_n$ 种产生方式.

2. 集合的排列与组合

集合的排列 从 n 元集 S 中有序、不重复选取的 r 个元素称为 S 的一个 r-**排列**,当 $r=n$ 时,称排列为 S 的**全排列**. S 的所有 r-排列的个数记作 $P(n,r)$.

集合的组合 从 n 元集 S 中无序、不重复选取的 r 个元素称为 S 的一个 r-**组合**,S 的所有 r-组合的个数记作 $C(n,r)$,也称为**二项式系数**.

排列数与组合数的公式:

定理 8.1 设 n,r 为自然数,则

$$P(n,r)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!} & n\geqslant r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

S 的 r-**环排列数** $=\dfrac{P(n,r)}{r}$

定理 8.2 设 n,r 为自然数,则

$$C(n,r)=\begin{cases}\dfrac{P(n,r)}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!} & n\geqslant r\\ 0 & n<r\end{cases}$$

3. 多重集的排列与组合

设多重集 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$，$0<n_i\leqslant+\infty$．$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$．

从 S 中有序选取的 r 个元素称为多重集 S 的 r-排列，当 $r=n$ 时称 S 的 r-排列为 S 的**全排列**．全排列数记作 $\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_k}$，也称为**多项式系数**．从 S 中无序选取的 r 个元素称为多重集 S 的 r-组合．

多重集的排列组合公式：

定理 8.3 多重集 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$，$0<n_i\leqslant+\infty$．$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，$S$ 的全排列数

$$\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

若 $r\leqslant n_i$，$i=1,2,\cdots,k$ 时，S 的 r-排列数是 k^r．

定理 8.4 多重集 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$，$0<n_i\leqslant+\infty$．$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，当 $r\leqslant n_i$，$i=1,2,\cdots,k$ 时，多重集 S 的 r-组合数 $N=C(k+r-1,r)$．

方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的非负整数解的个数是 $C(k+r-1,r)$．

方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的正整数解的个数是 $C(r-1,k-1)$．

4. 二项式定理

定理 8.5（二项式定理） 设 n 是正整数，对一切 x 和 y，则

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

推论 设 n 是正整数，则

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

5. 主要的组合恒等式

(1) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ $\quad n,k\in\mathbf{N},n\geqslant k$

(2) $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ $\quad n,k\in\mathbf{Z}^+,n\geqslant k$

(3) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$ $\quad n,k\in\mathbf{Z}^+,n>k$ （Pascal 公式）

(4) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ $\quad n\in\mathbf{N}$

(5) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$ $\quad n\in\mathbf{Z}^+$

(6) $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$ $\quad n\in\mathbf{Z}^+$

(7) $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}$ $\quad n\in\mathbf{Z}^+$

(8) $\sum_{l=0}^{n}\binom{l}{k}=\binom{n+1}{k+1}\qquad n,k\in\mathbf{N}$

(9) $\binom{n}{r}\binom{r}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}\qquad n\geqslant r\geqslant k,\quad n,r,k\in\mathbf{N}$

(10) $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}\qquad m,n,r\in\mathbf{N},\quad r\leqslant\min(m,n)$

(11) $\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{m}\qquad m,n\in\mathbf{N}$

组合恒等式的证明方法：

(1) 已知恒等式代入并化简.

(2) 使用二项式定理比较相同项的系数.

(3) 利用二项式定理以及幂级数的求导或者积分.

(4) 数学归纳法.

(5) 组合分析方法.

组合数序列的求和方法：

(1) 利用 Pascal 公式不断归并相关的项.

(2) 级数求和.

(3) 观察和的计算结果,然后使用归纳法证明.

(4) 利用已知的恒等式.

6. 非降路径问题

(1) 从(0,0)点到(m,n)点的非降路径数$\binom{m+n}{m}$或$\binom{m+n}{n}$.

(2) 给定非负整数 a、b、m、n,其中 $a\leqslant m$,$b\leqslant n$. 从(a,b)点到(m,n)点的非降路径数$\binom{m-a+n-b}{m-a}$.

(3) 设 a、b、c、d、m、n 是非负整数,其中 $a\leqslant c\leqslant m$,$b\leqslant d\leqslant n$. 从(a,b)点经过(c,d)点到(m,n)点的非降路径数,等于从(a,b)点到(c,d)点的非降路径数与从(c,d)点到(m,n)点的非降路径数之积.

(4) 从(0,0)点到(n,n)点除端点外中间不接触对角线 $y=x$ 的非降路径数$\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

(5) 从(0,0)点到(n,n)点不穿过对角线 $y=x$ 且在对角线下方的非降路径数$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

7. 多项式定理

定理 8.6 设 n 为正整数,x_i 为实数,$i=1,2,\cdots,t$. 那么有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=\sum_{\substack{\text{满足}n_1+\cdots+n_t=n\\ \text{的非负整数解}}}\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$$

这里$\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_t}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$,称为**多项式系数**.

推论 1 在多项式定理的展开式中，右边不同的项数为不定方程 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$ 的非负整数解的个数 $\binom{n+t-1}{n}$.

推论 2 $\sum\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_t}=t^n$，其中求和是对方程 $n_1+n_2+\cdots+n_t=n$ 的所有的非负整数解求和.

多项式系数的恒等式：

$$\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_t}=\binom{n-1}{n_1-1 n_2 \cdots n_t}+\binom{n-1}{n_1 n_2-1 \cdots n_t}+\cdots+\binom{n-1}{n_1 n_2 \cdots n_t-1}$$

8.2 习　　题

8.1 从去掉大小王的 52 张扑克牌中取出 5 张牌，若其中有 4 张点数一样，则有多少种取法？若第一张牌是红桃，第二张牌不是 K，则有多少种取法？

8.2 从集合$\{1,2,\cdots,1000\}$中选 3 个数使得其和是 4 的倍数，问有多少种方法？

8.3 从 $S=\{1,2,\cdots,20\}$中选出 4 个数使得其和是 3 的倍数，问有多少种选法？

8.4 有多少个十进制 3 位数的数字恰有一个 8 和一个 9？

8.5 由 1,2,3,4 这 4 种数字能构成多少个大于 230 的 3 位数？

8.6 从集合$\{1,2,\cdots,9\}$中选取不同数字构成 7 位数，如果 5 和 6 不相邻，则有多少种方法？

8.7 在 1 到 1000 之间(包括 1 和 1000 在内)有多少个整数的各位数字之和小于 7？

8.8 用数字 0,1,2,3,4,5 能组成多少个没有重复数字且比 34 521 大的 5 位数？

8.9 有多少个大于 5400，不含 2 和 7，且各位数字不重复的整数？

8.10 设有 k 种明信片，每种张数不限. 现在要分别寄给 n 个朋友，$k\geqslant n$，若给每个朋友寄 1 张明信片，有多少种寄法？若给每个朋友寄 1 张明信片，但每个人得到的明信片都不相同，则有多少种寄法？若给每个朋友寄 2 张不同的明信片(不同的人可以得到相同的明信片)，则有多少种寄法？

8.11 设有 k 类明信片，且第 i 类明信片的张数是 A_i，$i=1,2,\cdots,k$. 把它们全部送给 n 个朋友，问有多少种方法？

8.12 由满足不等式 $x_1+x_2+x_3<5$ 的非负整数解 x_1,x_2,x_3 构成的有序三元组 $\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ 的个数是多少？

8.13 把 10 个不同的球放到 6 个不同的盒子里，允许空盒，且前 2 个盒子中球的总数至多是 4，则有多少种放法？

8.14 书架上有 24 卷百科全书，从其中选 5 卷使得任何 2 卷都不相继，问这样的选法有多少种？

8.15 由集合$\{5\cdot a,1\cdot b,1\cdot c,1\cdot d,1\cdot e\}$中的全体元素构成字母序列，求：

(1) 没有 a 相邻的序列个数.

(2) b,c,d,e 中的任何两个字母都不相邻的序列个数.

8.16 满足不等式 $x_1+x_2+x_3\leqslant 7$ 的非负整数解的个数是多少？

8.17　设 $S=\{1,2,\cdots,n+1\}$,从 S 中选择 3 个数构成有序 3 元组 $\langle x,y,z\rangle$ 使得 $z>x$ 且 $z>y$.

(1) 证明:若 $z=k+1$,则这样的有序 3 元组恰为 k^2 个.

(2) 将所有的有序 3 元组按照 $x=y,x<y,x>y$ 分成 A,B,C 三组,证明:

$$|A|=\binom{n+1}{2},\quad |B|=|C|=\binom{n+1}{3}$$

(3) 由 (1)和(2)证明恒等式:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}$$

8.18　有 n 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$. 从中选出两组数,每组至少含 1 个数,如要求第一组的最小数大于第二组的最大数,问有多少种方案?

8.19　根据 IPv4 网络协议,每个计算机的地址是 32 位二进制数字构成的串. 其中A 类地址第一位是 0,接着 7 位是网络标识,再接着 24 位是主机标识. B 类地址前两位是 10,接着 14 位网络标识,再接着 16 位主机标识. C 类地址前三位是 110,接着 21 位网络标识,再接着 8 位主机标识. 此外,A 类地址中全 1 不能做网络标识,在三类地址中全 0 和全 1 都不能作为主机标识. 问按照 IPv4 协议,在 Internet 中有多少个有效的计算机地址?

8.20　假设计算机系统的每个用户有一个 4~6 个字符的登录密码,每个字符是大写字母或者十进制数字,且每个密码必须至少包含一个数字. 问有多少个可能的登录密码?

8.21　从 $S=\{\infty\cdot 0,\infty\cdot 1,\infty\cdot 2\}$ 中取 n 个数做排列,若不允许相邻位置的数相同,问有多少种排法?

8.22　给出多重集 $\{2\cdot a,1\cdot b,3\cdot c\}$ 的所有的 3-排列与 3-组合.

8.23　有 3 只蓝球,2 只红球,2 只黄球排成一列,若黄球不相邻,则有多少种方法?

8.24　由 m 个 A 和 n 个 B 构成序列,其中 m,n 为正整数且 $m\leqslant n$. 如果要求每个 A 后面至少紧跟着 1 个 B,问有多少个不同的序列?

8.25　$A=\{1,2,\cdots,n\}$,$S\subseteq A$,其中 n 为给定正整数,如果 S 的每个元素都不小于 S 的元素个数 $|S|$,就称 S 是饱满的(这里认为空集是饱满的). 令 $N(n)$ 表示 A 的饱满子集的个数.

(1) 导出关于 $N(n)$ 的公式.

(2) 计算 $N(8)$.

8.26　证明:

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=3^n$.

(2) $\displaystyle\sum_{k-0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k}=2^n$.

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\binom{n}{k-1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

8.27　求和:

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}$.

(2) $\binom{r+0}{0}\binom{m-0}{n-0}+\binom{r+1}{1}\binom{m-1}{n-1}+\cdots+\binom{r+n}{n}\binom{m-n}{n-n}$.

8.28 证明组合恒等式：

(1) $\sum_{k=2}^{n-1}(n-k)^2\binom{n-1}{n-k}=n(n-1)2^{n-3}-(n-1)^2$.

(2) $\sum_{k=r}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{r}=0$.

8.29 证明：$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$.

8.30 求和：$\sum_{k=0}^{n}C(2n,2k)$.

8.31 设 $3n+1$ 个球中恰好有 n 个相同，证明从这 $3n+1$ 个球中选 n 个球的方案数是 2^{2n}.

8.3 习题解答与分析

8.1 先选 4 张点数一样的牌，有 13 种选法. 然后再选另一张牌，有 48 种选法，因此 5 张牌中有 4 张点数一样的选法数是 $13\times48=624$.

若第一张牌是红桃 K，则第二张牌只能从除去所有 K 剩下的 48 张牌选取，有 48 种选法. 若第一张牌不是红桃 K，那么第一张牌有 12 种选择，第二张牌有 47 种可能的选法. 综合上述，总选法数是 $48+12\times47=612$.

8.2 将 1～1000 中的数按照除以 4 的余数分别为 0、1、2、3，划分成集合 A、B、C、D. 将选法分成下面几类：3 个数都取自 A，有 $C(250,3)$ 种方法；2 个数取自 B，1 个数取自 C（或 2 个数取自 D，1 个数取自 C，或 2 个数取自 C，1 个数取自 A）有 $C(250,2)C(250,1)$ 种方法；A、B、D 中各取 1 个数，有 $C(250,1)^3$ 种方法. 根据加法法则，所求方法数是

$$N=C(250,3)+3C(250,2)C(250,1)+C(250,1)^3=41\,541\,750$$

8.3 将 1～20 中的数按除以 3 的余数为 0、1、2 划分成集合 A、B、C. 其中 $|A|=6$，$|B|=|C|=7$. 将选法分成下面几类：

4 个数都取自 A，有 $C(6,4)=15$ 种方法；

A 中取 2 个数，B 中取 1 个数，C 中取 1 个数，有 $C(6,2)C(7,1)C(7,1)=735$ 种方法；

A 中取 1 个数，B 中取 3 个数，有 $C(6,1)C(7,3)=210$ 种方法；

A 中取 1 个数，C 中取 3 个数，有 $C(6,1)C(7,3)=210$ 种方法；

B 中取 2 个数，C 中取 2 个数，有 $C(7,2)C(7,2)=441$ 种方法.

根据加法法则，所求方法数是 $15+735+210+210+441=1611$.

8.4 先从 $0,1,\cdots,7$ 中选择一个数字，有 $C(8,1)$ 种方法. 将这个数字与 8 和 9 组成 3 位数，有 $3!$ 种排列. 其中，089 和 098 不符合题目要求. 因此，所求的 3 位数是 $3!\times C(8,1)-2=46$ 个.

8.5 若第 1 位是 3 或 4，则第 2 位和第 3 位每位有 4 种选择，共计 $2\times4^2=32$ 种方式. 若第 1 位是 2，那么第 2 位可以是 3 或 4 有 2 种选择，第 3 位可以有 4 种选择，总共 8 种方

法.于是,大于230的3位数有32+8=40个.

8.6 从{1,2,…,9}选出7个数字进行排列有$P(9,7)$种方法.考虑其中5和6相邻的方式数.将5与6看成1个大数字,构成这个大数字的方式数就是5与6的排列数,有2种;剩下的5个数字从{1,2,3,4,7,8,9}中选择,有$C(7,5)$种选法,将这些数字与5和6的大数字进行全排列,就构成了5与6相邻的方式.因此5与6相邻的方式有$2\times 6!\times C(7,5)$种,于是所要求的数恰好有$P(9,7)-2\times 6!\times C(7,5)=151\ 200$个.

8.7 设百位、十位、个位数字分别为x、y、z,那么$x+y+z=r$,$r=1,2,\cdots,6$.该方程的非负整数解个数是$C(r+3-1,r)=C(r+2,2)$.除此之外,1000本身也满足要求.于是所求的数的个数是

$$\sum_{r=1}^{6}\binom{r+2}{2}+1=\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2}+\binom{8}{2}+1=84$$

8.8 如果第1位是4,那么后面的4个数字构成{0,1,2,3,5}的4-排列,有$P(5,4)$种方式,类似地,若第1位是5,也有相同的结果.如果第1位是3,为了使得这个数大于34 521,那么第2位只能取5,剩下的后3位构成{0,1,2,4}的3-排列,有$P(4,3)$种方式.于是所求的数有$2P(5,4)+P(4,3)=264$个.

8.9 如果这个数是$i+1$位数,$i=4$、5、6、7,那么它的最高位可能为1、3、4、5、6、8、9,有7种可能.设最高位为j,其余的位构成集合$\{0,1,\cdots,9\}-\{2,7,j\}$的$i$排列.根据乘法法则与加法法则,这些数的个数是

$$\sum_{i=4}^{7}7P(7,i)=94\ 080$$

如果这个数是4位数,那么当最高位为6、8、9时,其他各位为剩下的7个数的3-排列,有$3P(7,3)$种构成方法.如果最高位为5,次高位只能是4、6、8、9,其余部分是6个数字的2-排列,因此有$4P(6,2)$种构成方法.根据加法法则,这样的4位数有$3P(7,3)+4P(6,2)=750$个.从而得到所求的数的个数是

$$N=94\ 080+750=94\ 830$$

8.10 因为每人得到1张明信片有k种不同的可能,因此n个人有k^n种可能.如果每个人都得到1张不同的明信片,相当于从k张明信片中选出n张进行排列,有$P(k,n)$种方法.若使得每个人都得到2张不同的明信片,那么先从k张明信片中选出2张,有$C(k,2)$种选法,每个人得到的2张明信片可能属于任何一种选法.于是所求的方法数是$(C(k,2))^n$.

8.11 第i种明信片有$\binom{A_i+n-1}{A_i}$种送出的方法,因此总方法数为

$$N=\prod_{i=1}^{k}\binom{A_i+n-1}{A_i}$$

8.12 考虑方程$x_1+x_2+x_3=r$,$r=0,1,\cdots,4$的非负整数解的个数,即$C(6,2)+\cdots+C(2,2)=35$.

8.13 从10个球中先选出放入前两个盒子的k个球,$k=0,1,2,3,4$.然后将这些球放入前两个盒子.由于每个球有2种放法,根据乘法法则,总放法是$C(10,k)2^k$种.剩下的10−

k 个球需要放入后 4 个盒子，每个球有 4 种选择，共 4^{10-k} 种放法. 使用乘法法则并对 k 求和，最终得到 $\sum_{k=0}^{4} C(10,k)2^k 4^{10-k} = 47\ 579\ 136$.

8.14　使用一一对应的方法，将所有书的集合记作 $S=\{1,2,\cdots,24\}$，选出的 5 卷不相继的书为 $i_1,i_2,\cdots,i_5$，其中 $i_1<i_2<\cdots<i_5$，且 $i_j+1\neq i_{j+1}$，$j=1,2,3,4$. 令 $k_j=i_j-j+1$，$j=1,2,3,4,5$. 例如 $i_1,i_2,\cdots,i_5$ 是 2,5,7,13,15，那么 $k_1,k_2,\cdots,k_5$ 是 2,4,5,10,11. 显然，i_1，$i_2,\cdots,i_5$ 与 $k_1,k_2,\cdots,k_5$ 之间是一一对应的. $\{k_1,k_2,\cdots,k_5\}$ 恰好是 $\{1,2,\cdots,20\}$ 的 5 组合，因此所求得选法数是 $C(20,5)=15\ 504$.

8.15　(1) 如果没有 a 相邻，那么在 5 个 a 中间必须插入 b、c、d、e 4 个字母. 插入的方法数是这 4 个字母的排列数，即 $4!=24$.

(2) **方法 1**　将 5 个 a 看成格子的边界，形成 6 个格子，从其中选出 4 个格子放 b、c、d、e 4 个字母有 $P(6,4)=6\times5\times4\times3=360$ 种方法.

方法 2　先放 b、c、d、e，有 $4!$ 种方法. 然后，在其中每两个字母中间插入 1 个 a. 剩下的 2 个 a，可以放在以 b、c、d、e 作为格子边界的 5 个格子中. 设这 5 个格子中 a 的个数分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_5$，那么方法数等于方程 $x_1+x_2+\cdots+x_5=2$ 的非负整数解个数，即 $C(5+2-1,2)=C(6,2)=15$. 根据乘法法则，所求的方法数是 $15\times4!=360$.

8.16　方程 $x_1+x_2+x_3=i$ 的非负整数解的个数是 $\binom{i+3-1}{i}$，对 $i=0,1,\cdots,7$ 求和就得到所求的计数，这个结果等于

$$\sum_{i=0}^{7}\binom{i+3-1}{i}=\sum_{i=0}^{7}\binom{i+2}{2}=\sum_{k=0}^{9}\binom{k}{2}=\binom{9+1}{2+1}=120$$

8.17　(1) $z=k+1$，则 x、y 各有 k 种选择，故不同三元组有 k^2 个.

(2) 当 $x=y$ 时，不同的三元组数为从 $1,2,\cdots,n+1$ 选择 2 个数的选法数，即 $\binom{n+1}{2}$. 当 $x<y$ 时，对于 $z=3,4,\cdots,n+1$，x 与 y 的选法数为 $C(z-1,2)$. 使用加法法则，则不同的三元组数为 $C(2,2)+C(3,2)+\cdots+C(n,2)=\binom{n+1}{3}$. 类似的分析可以知道，当 $x>y$ 时，不同的三元组数也是 $\binom{n+1}{3}$.

(3) 利用(1)和(2)的结果，再使用加法法则就可以得到

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}$$

8.18　先选 k 个数，$2\leqslant k\leqslant n$，然后把 k 个数分成两组，共 $k-1$ 种分法，根据乘法法则与加法法则得到计数结果，再利用组合公式化简得

$$\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n}{k}=(n-2)2^{n-1}+1$$

8.19　A 类地址的网络标识有 $2^7-1=127$ 种，主机标识有 $2^{24}-2=16\ 777\ 214$ 种；B 类地址的网络标识有 $2^{14}=16\ 384$ 种，主机标识有 $2^{16}-2=65\ 534$ 种；C 类地址的网络标识有 $2^{21}=2\ 097\ 152$ 种，主机标识有 $2^8-2=254$ 种. 于是，有效地址总数为

$$\begin{aligned} N &= (2^7-1)(2^{24}-2)+2^{14}(2^{16}-2)+2^{21}(2^8-2) \\ &= 2^{31}-2^{24}-2^8+2+2^{30}-2^{15}+2^{29}-2^{22} \\ &= 3\ 737\ 091\ 842 \end{aligned}$$

8.20　将密码按照字符个数进行分类,包含4个字符的有($4^{36}-4^{26}$)个,包含5个字符的有($5^{36}-5^{26}$)个,包含6个字符的有($6^{36}-6^{26}$)个.因此,登录密码总数为

$$N=(36^4-26^4)+(36^5-26^5)+(36^6-26^6)$$

8.21　第1位数可以有3种选法,第2位数只能有2种选法,因为它不能选择第1位的数.按照这样的安排,从第2位到第n位,每位都有2种选法,根据乘法法则,选择的方法有$3\times2^{n-1}$种.

8.22　3-组合:$\{a,a,b\},\{a,a,c\},\{a,b,c\},\{a,c,c\},\{b,c,c\},\{c,c,c\}$

3-排列:$aab,aba,baa,aac,aca,caa,abc,acb,bac,bca,cab,cba,acc,cac,cca,bcc,cbc,ccb,ccc$

8.23　令$S=\{3\cdot b,2\cdot r,2\cdot y\}$,其中$b,r,y$分别代表蓝球、红球、黄球.先考虑$S$的全排列,有$\frac{7!}{3!2!2!}$种方法.若黄球相邻,那么将两个相邻的黄球看成1个球,相当于$\{3\cdot b,2\cdot r,1\cdot y\}$的全排列,有$\frac{6!}{3!2!}$种方法,于是所求的方法数是$\frac{7!}{3!2!2!}-\frac{6!}{3!2!}=150$.

8.24　**方法1**　先放m个AB,只有一种方法.然后在由这m个AB构成的$m+1$个空格中加入$n-m$个B.这相当于方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_{m+1}=n-m$$

的非负整数解的个数,因此

$$N=C(n-m+m+1-1,n-m)=C(n,n-m)=C(n,m)$$

方法2　将B看作格子分界,形成了$n+1$个空格.除了最后一个空格之外,从其他n个空格中选择m个空格放A,有$C(n,m)$种方法.

8.25　(1)A中大于等于k的元素个数为$n-k+1$,因此含k个元素的饱满子集有$C(n-k+1,k)$个,于是饱满子集总数为

$$N(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+1}{k}$$

(2)$N(8)=\sum_{k=0}^{8}\binom{9-k}{k}=55$.

8.26　(1)**方法1**　由二项式定理有

$$(2x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2x)^k$$

在上式中令$x=1$即可.

方法2　对n归纳,则

$n=1$,$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}2^k=2^0+2^1=3$,命题为真.

假设命题对于n为真,考虑$n+1$的情况,则

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}2^k=1+2^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}2^k$$

$$= 1 + 2^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}2^k + 2^{n+1}$$

$$= 3^n + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}2^{k+1} + 2^{n+1} = 3^n + 2\left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}2^k + \binom{n}{n}2^n\right]$$

$$= 3^n + 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n + 2 \cdot 3^n = 3^{n+1}$$

由归纳法,命题为真.

(2) 由二项式定理有

$$(-1+3x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(3x)^{n-k}$$

在上式中令 $x=1$ 即可.

(3) **方法1** 由二项式定理得 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$,对两边积分得

$$\int_0^x (1+x)^n \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\int_0^x \binom{n}{k}x^k \mathrm{d}x$$

于是得到

$$\frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

在上式中令 $x=1$,得到

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\binom{n}{k-1}$$

方法2 利用主教材 p194~195 的公式(2)和公式(4)得到

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = 1 + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

8.27 (1) **方法1** 利用主教材 p194 和 p196 的公式 (1)和公式(8)得到

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m} = \sum_{k=n-m}^{n}\binom{k}{n-m} = \binom{n+1}{n-m+1} = \binom{n+1}{m}$$

方法2 利用 Pascal 公式,得

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n-m}{0} + \binom{n-m+1}{1} + \binom{n-m+2}{2} + \cdots + \binom{n}{m}$$

$$= \left[\binom{n-m+1}{0} + \binom{n-m+1}{1}\right] + \binom{n-m+2}{2} + \binom{n-m+3}{3} + \cdots + \binom{n}{m}$$

$$= \binom{n-m+2}{1} + \binom{n-m+2}{2} + \binom{n-m+3}{3} + \cdots + \binom{n}{m}$$

$$= \cdots$$

$$=\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m}$$

(2) 如图8.1所示,考虑从(0,0)点到$(m-n+r+1,n)$点的非降路径数,将这些路径按照经过$x=r$直线上不同的点(r,k)向右进行分类,其中$k=0,1,\cdots,n$. 从(0,0)点到(r,k)点的非降路径有$\binom{r+k}{k}$条,从$(r+1,k)$点到$(m-n+r+1,n)$点的非降路径有$\binom{m-k}{n-k}$条. 因此从(0,0)点经过(r,k)点向右到达$(m-n+r+1,n)$点的非降路径数是$\binom{r+k}{k}\binom{m-k}{n-k}$. 对$k=0,1,\cdots,n$求和即得$\binom{m+r+1}{n}$.

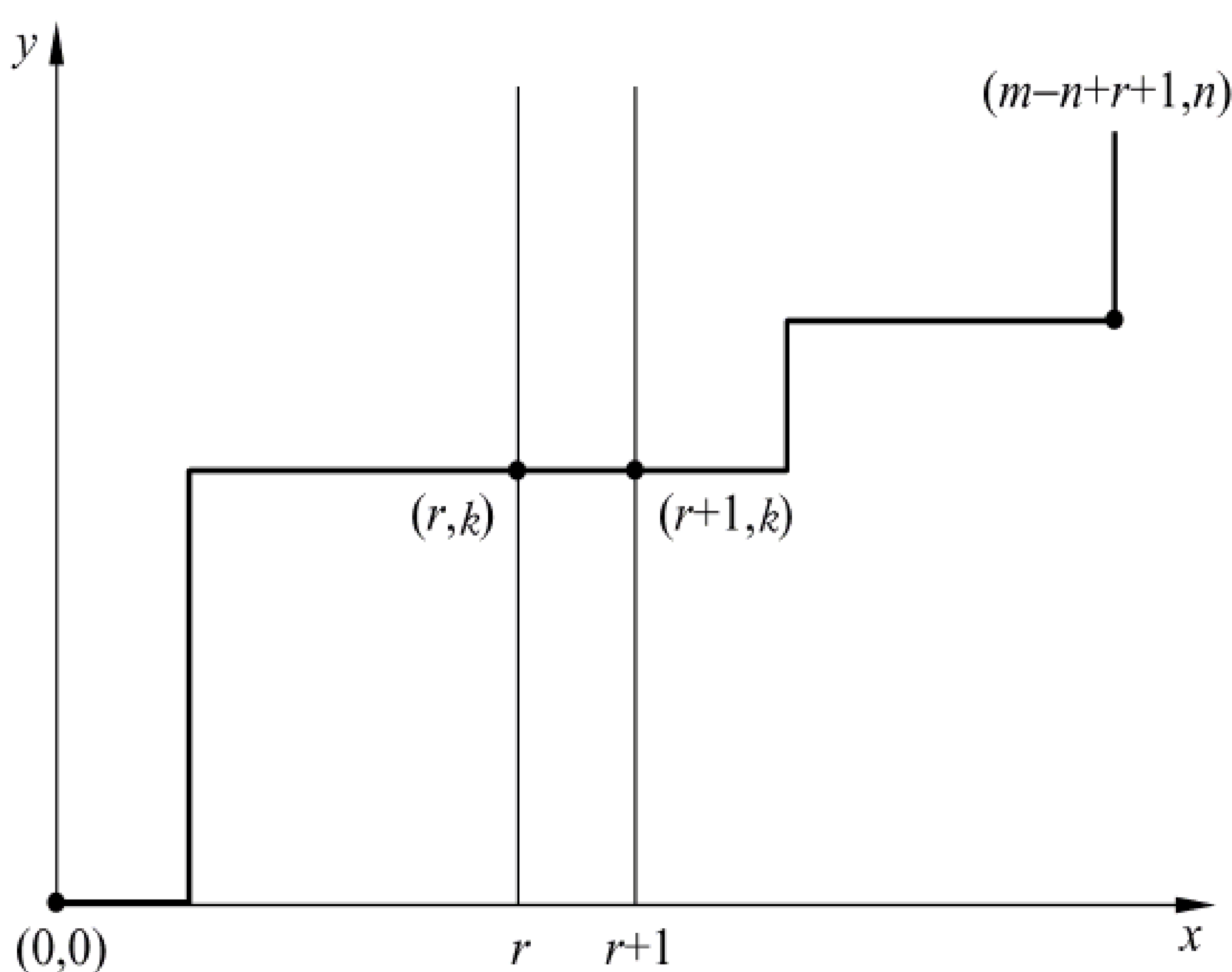


图 8.1

8.28 (1) 利用主教材p195中的公式(7)得到

$$\sum_{k=2}^{n-1}(n-k)^2\binom{n-1}{n-k}=\sum_{k=1}^{n-2}k^2\binom{n-1}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}k^2\binom{n-1}{k}-(n-1)^2=n(n-1)2^{n-3}-(n-1)^2$$

(2) 利用主教材p195和p196中的公式(5)和公式(9)得到

$$\sum_{k=r}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{r}=\sum_{k=r}^{n}(-1)^k\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}\underset{k'=k-r}{=}\sum_{k'=0}^{n-r}(-1)^{k'+r}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k'}$$
$$=(-1)^r\binom{n}{r}\sum_{k'=0}^{n-r}(-1)^{k'}\binom{n-r}{k'}=(-1)^r\binom{n}{r}\cdot 0=0$$

8.29 利用主教材p194和p197中的公式(1)和公式(10)得到

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\binom{n}{n-1-k}=\binom{n+n}{n-1}=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

8.30 利用主教材p195中的公式(4)和公式(5)得到

$$n=0,\quad \sum_{k=0}^{n}C(2n,2k)=1$$

$$n>0,\quad \sum_{k=0}^{n} C(2n,2k)=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}+\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\right]=\frac{1}{2}(2^{2n}+0)=2^{2n-1}$$

8.31 令 $S=\{1\cdot a_1,1\cdot a_2,\cdots,1\cdot a_{2n+1},n\cdot b\}$，求 S 的 n 组合数，按照含多少个 b 分类处理.

不含 b：$C(2n+1,n)$

含 1 个 b：$C(2n+1,n-1)$

⋮

含 n 个 b：$C(2n+1,0)$

根据加法法则有

$$\begin{aligned}N&=C(2n+1,n)+C(2n+1,n-1)+\cdots+C(2n+1,0)\\&=[C(2n+1,2n+1)+\cdots+C(2n+1,0)]-[C(2n+1,2n+1)\\&\quad+C(2n+1,2n)+\cdots C(2n+1,n+1)]\\&=2^{2n+1}-[C(2n+1,0)+C(2n+1,1)+\cdots+C(2n+1,n)]\\&=2^{2n+1}-N\end{aligned}$$

解得

$$N=2^{2n+1}/2=2^{2n}$$

第 9 章 容斥原理

9.1 内容提要

1. 容斥原理

定理 9.1 设 S 为有穷集，$P_1,P_2,\cdots,P_m$ 是 m 种性质，A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，$\overline{A}_i$ 是 A_i 相对于 S 的补集，其中 $i=1,2,\cdots,m$. 那么 S 中不具有性质 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 的元素数为

$$
\begin{aligned}
|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m| = &|S| - \sum_{i=1}^{m}|A_i| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j| \\
&- \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots \\
&+ (-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|
\end{aligned}
$$

推论 S 中至少具有其中一条性质的元素数为

$$
\begin{aligned}
|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m| = &\sum_{i=1}^{m}|A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j| \\
&+ \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \cdots \\
&+ (-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|
\end{aligned}
$$

2. 对称筛公式

令 $|S|=N$，$N_k=|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|$，其中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m$，$k=1,2,\cdots,m$，则

$$
N_0 = N - \binom{m}{1}N_1 + \binom{m}{2}N_2 - \cdots + (-1)^m\binom{m}{m}N_m = N + \sum_{t=1}^{m}(-1)^t\binom{m}{t}N_t
$$

3. 容斥原理的应用实例

计算多重集的 r 组合数.

证明组合恒等式.

欧拉函数的值：

设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的素因子分解式，其中，$p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是素数，则欧拉函数

$$
\phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)
$$

错位排列：

错位排列数 $D_n = n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$.

错位排列数的递推方程：

$$\begin{cases} D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1}) \\ D_1=0, \quad D_2=1 \end{cases}$$

错位排列数 D_n满足下面恒等式(这里规定 $D_0=1$):

$$n!=\binom{n}{0}D_n+\binom{n}{1}D_{n-1}+\binom{n}{2}D_{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}D_0$$

错位排列数满足下面的性质:D_n为偶数当且仅当n 为奇数.

当 n 充分大时,错位排列数与排列总数的比值趋向于 $1/e$.

4. 棋盘多项式与有限制条件的排列

布棋方案数 $r_k(C)$ 对于给定棋盘 C,如果不允许两个棋子布在同一行和同一列,则 k 个棋子的布棋方案数为 $r_k(C)$. 规定 $r_0(C)=1$.

$r_k(C)$的性质:

(1) 在 C 中任意选定一个方格,令 C_i表示在 C 中去掉指定方格所在的行和列之后剩余的棋盘,C_l表示在 C 中去掉指定方格后剩余的棋盘,那么有

$$r_k(C)=r_{k-1}(C_i)+r_k(C_l)$$

(2) 设 C 由 C_1、C_2两个分离的棋盘构成,这里“分离”的含义是指 C_1与 C_2不存在共同的行和列. 换句话说,它们的布棋方案相互独立. 那么有

$$r_k(C)=\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)$$

棋盘多项式:

设 C 为给定棋盘,在 C 上的布棋方案数构成数列 $r_0(C),r_1(C),r_2(C),\cdots,r_k(C),\cdots$. 用这个数列的项 $r_k(C)$作为 x^k的系数,构成形式幂级数

$$r_0(C)+r_1(C)x+r_2(C)x^2+\cdots+r_k(C)x^k+\cdots$$

称为 C 的**棋盘多项式**,记作 $R(C)$,即

$$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)x^k$$

棋盘多项式的性质:

$$R(C)=xR(C_i)+R(C_l)$$
$$R(C)=R(C_1)R(C_2)$$

这里的 C_i、C_l、C_1、C_2的含义与前面相同.

有限制条件的排列计数:

定理 9.2 设 C 是 $n\times n$ 的具有给定禁区的棋盘,这个禁区对应于$\{1,2,\cdots,n\}$中的元素在排列中不允许出现的位置,则这种有限制条件的排列数为

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\cdots+(-1)^n r_n$$

其中,r_i是 i 个棋子布置到禁区的方案数.

9.2 习　　题

9.1 在 1 和 10 000 之间(包括 1 和 10 000 在内)不能被 4、5 和 6 整除的整数有多少个?

9.2　在1和10 000之间(包括1和10 000在内)既不是某个整数的平方,也不是某个整数的立方的整数有多少个?

9.3　一个学校有507、292、312、344个学生分别选了微积分、离散数学、数据结构、程序设计语言课,且有14人选了微积分和数据结构课,213人选了微积分和程序设计语言课,211人选了离散数学和数据结构课,43人选了离散数学和程序设计语言课,没有学生同时选微积分和离散数学课,也没有学生同时选数据结构和程序设计语言课.问:有多少学生在微积分、离散数学、数据结构或程序设计语言中选了课?

9.4　使用容斥原理求小于200的素数个数.

9.5　确定方程 $x_1+x_2+x_3=14$ 的使得每个 $x_i(i=1,2,3)$ 都不超过8的正整数解的个数.

9.6　有3只蓝球、2只红球、2只黄球排成一列,若黄球不相邻,红球也不相邻,则有多少种方法?

9.7　求多重集 $S=\{3\cdot a,4\cdot b,2\cdot c\}$ 的排列数,使得在这些排列中同类字母的全体不能相邻(例如不允许 *abbbbccaa*,但允许 *aabbbacbc*).

9.8　设 $S=\{2\cdot a_1,2\cdot a_2,\cdots,2\cdot a_k\}$ 是多重集,如果在 S 的全排列中任意两个 $a_i(i=1,2,\cdots,k)$ 都不相邻,问这样的全排列有多少个?

9.9　有7本书放在书架上,先把书拿下来然后重新放回书架,求满足以下条件的放法数.

(1) 没有1本书在原来的位置上.

(2) 至少有1本书在原来的位置上.

(3) 至少有2本书在原来的位置上.

9.10　用恰好 k 种可能的颜色做旗子,使得每面旗子由 n 条彩带构成($n\geqslant k$),且相邻的两条彩带都不相同,求不同的旗子数.

9.11　证明错位排列数 D_n 满足:n 为偶数当且仅当 D_n 为奇数.

9.12　n 对夫妻围圆桌就座,要求每对夫妻不相邻,问有多少种入座方式?

9.13　把15个人分到3个不同的房间,每个房间至少一个人,问有多少种分法?

9.14　使用数学归纳法证明容斥原理.

9.15　证明棋盘多项式具有以下性质.

(1) $R(C)=xR(C_i)+R(C_l)$.

(2) $R(C)=R(C_1)\cdot R(C_2)$,其中 C_1 和 C_2 不存在公共的行和列.

9.16　计算 R(棋盘图).

9.3　习题解答与分析

9.1　被4、5和6整除的数的个数分别为

$$\lfloor 10\,000/4\rfloor=2500,\quad \lfloor 10\,000/5\rfloor=2\,000,\quad \lfloor 10\,000/6\rfloor=1666$$

被4和5、被4和6、被5和6两个数同时整除的数的个数分别为

$$\lfloor 10\,000/20\rfloor=500,\quad \lfloor 10\,000/12\rfloor=833,\quad \lfloor 10\,000/30\rfloor=333$$

被4、5、6三个数整除的数的个数是

$$\lfloor 10\,000/60 \rfloor = 166$$

根据容斥原理,不能被 4、5 和 6 整除的数的个数是

$$N = 10\,000 - (2500 + 2000 + 1666) + (500 + 833 + 333) - 166 = 5334$$

9.2 在 1 到 10 000 之间是某个数的平方的数有 100 个.由于 $21^3 < 10\,000 < 22^3$,是某个数的立方的数有 21 个.同理,由于 $4096 = 4^6 < 10\,000 < 5^6 = 125^2$,因此既是某个数平方,也是某个数的立方的数有 4 个.根据容斥原理,所求的数的个数是

$$N = 10\,000 - (100 + 21) + 4 = 9883$$

9.3 设选修微积分、离散数学、数据结构、程序设计语言的学生集合分别为 A、B、C、D.根据题意得到

$$|A| = 507, |B| = 292, |C| = 312, |D| = 344$$
$$|A \cap C| = 14, |A \cap D| = 213, |B \cap C| = 211, |B \cap D| = 43$$
$$|A \cap B| = 0, |C \cap D| = 0$$
$$|A \cap B \cap C| = |A \cap B \cap D| = |A \cap C \cap D|$$
$$= |B \cap C \cap D| = |A \cap B \cap C \cap D| = 0$$

于是得到

$$N = (507 + 292 + 312 + 344) - (14 + 213 + 211 + 43 + 0 + 0) + 0 - 0 = 974$$

9.4 由于 $14^2 < 200 < 15^2$,因此不超过 200 的数的最小素因子只可能是$\{2,3,5,7,11,13\}$中的数.设 1 到 200 之间能被 2、3、5、7、11、13 整除的数的集合分别记为 A、B、C、D、E、F.那么

$$|A| = 100, |B| = 66, |C| = 40, |D| = 28, |E| = 18, |F| = 15$$
$$|A \cap B| = 33, |A \cap C| = 20, |A \cap D| = 14, |A \cap E| = 9, |A \cap F| = 7$$
$$|B \cap C| = 13, |B \cap D| = 9, |B \cap E| = 6, |B \cap F| = 5, |C \cap D| = 5$$
$$|C \cap E| = 3, |C \cap F| = 3, |D \cap E| = 2, |D \cap F| = 2, |E \cap F| = 1$$
$$|A \cap B \cap C| = 6, |A \cap B \cap D| = 4, |A \cap B \cap E| = 3, |A \cap B \cap F| = 2$$
$$|A \cap C \cap D| = 2, |A \cap C \cap E| = 1, |A \cap C \cap F| = 1, |A \cap D \cap E| = 1$$
$$|A \cap D \cap F| = 1, |A \cap E \cap F| = 0, |B \cap C \cap D| = 1, |B \cap C \cap E| = 1$$
$$|B \cap C \cap F| = 1, |B \cap D \cap E| = 0, |B \cap D \cap F| = 0, |B \cap E \cap F| = 0$$
$$|C \cap D \cap E| = 0, |C \cap D \cap F| = 0, |C \cap E \cap F| = 0, |D \cap E \cap F| = 0$$

剩下的子集都是空集.使用容斥原理得到

$$\begin{aligned} N = {} & 200 - (100 + 66 + 40 + 28 + 18 + 15) \\ & + (33 + 20 + 14 + 9 + 7 + 13 + 9 + 6 + 5 + 5 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1) \\ & - (6 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \\ = {} & 200 - 267 + 132 - 24 = 41 \end{aligned}$$

除了这 41 个数之外,还需要加上 2、3、5、7、11、13 这 6 个素数,还需要去掉 1,因此 200 以内的素数有 46 个.

9.5 根据题意,所有的非负整数解为 $C(14+3-1,14) = C(16,2) = 120$ 个,其中一个数超过 8 的非负整数解个数是 $3C(5+3-1,5) = 3C(7,2) = 63$ 个,于是不超过 8 的非负整数解个数是 57.下面再考虑在这些解中含有的正整数解个数.在不超过 8 的非负整数解中,三个变量 x_1、x_2、x_3 中只可能有一个 x_i 取 0.在一个 x_i 为 0 时,其他的变量只有 6 和 8、7 和

7、8和6三种可能的取值.因此包含0值的解有9种,从而得到所求的正整数解的个数为$N=57-9=48$.

9.6 令$S=\{3\cdot b,2\cdot r,2\cdot y\}$,其中$b$、$r$、$y$分别代表蓝球、红球、黄球.先考虑$S$的全排列,有$\frac{7!}{3!2!2!}$种方法.若黄球相邻,那么将两个相邻的黄球看成1个球,相当于$\{3\cdot b,2\cdot r,1\cdot y\}$的全排列,有$\frac{6!}{3!2!}$种方法.类似地,红球相邻也有$\frac{6!}{3!2!}$种方法.不仅黄球相邻、同时红球也相邻的方法数是$\frac{5!}{3!1!1!}$.根据容斥原理,所求的方法数是

$$N=\frac{7!}{3!2!2!}-2\times\frac{6!}{3!2!}+\frac{5!}{3!}=210-120+20=110$$

9.7 设$T=\{x\mid x$是S的全排列$\}$,A、B、C是T的子集,且

$$A=\{x\mid x\in T\land x\text{ 含有 }aaa\}=\{x\mid x\text{ 是}\{1\cdot a',4\cdot b,2\cdot c\}\text{的全排列}\}$$

其中$a'=aaa$.

$$B=\{x\mid x\in T\land x\text{ 含有 }bbbb\}=\{x\mid x\text{ 是}\{3\cdot a,1\cdot b',2\cdot c\}\text{的全排列}\}$$

其中$b'=bbbb$.

$$C=\{x\mid x\in T\land x\text{ 含有 }cc\}=\{x\mid x\text{ 是}\{3\cdot a,4\cdot b,1\cdot c'\}\text{的全排列}\}$$

其中$c'=cc$.

则

$$|T|=\binom{9}{342},\quad |A|=\binom{7}{142},\quad |B|=\binom{6}{312},\quad |C|=\binom{8}{341}$$

类似地有

$$|A\cap B|=\binom{4}{112},\quad |A\cap C|=\binom{6}{141}$$

$$|B\cap C|=\binom{5}{311},\quad |A\cap B\cap C|=\binom{3}{111}$$

$$\begin{aligned}N&=\binom{9}{342}-\left[\binom{7}{142}+\binom{6}{312}+\binom{8}{341}\right]\\&\quad+\left[\binom{4}{112}+\binom{6}{141}+\binom{5}{311}\right]-\binom{3}{111}\\&=1260-(105+60+280)+(12+30+20)-6=871\end{aligned}$$

9.8 令$A=\{x\mid x$是S的全排列$\}$,$A_i=\{x\mid x\in A$且含有两个相邻的$a_i\}$,$i=1,2,\cdots,k$,则

$$|A|=\frac{(2k)!}{2^k}$$

$$|A_i|=\frac{(2k-1)!}{2^{k-1}},\quad i=1,2,\cdots,k$$

$$|A_i\cap A_j|=\frac{(2k-2)!}{2^{k-2}},\quad 1\leqslant i<j\leqslant k$$

$$\vdots$$

$$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|=k!$$

根据容斥原理有

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_k}|=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}\frac{(2k-r)!}{2^{k-r}}$$

9.9 (1) 相当于7个数的错位排列，于是

$$D_7=7!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\right]$$
$$=2520-840+210-42+7-1=1854$$

(2) $$N=7!-D_7=5040-1854=3186$$

(3) $$N=7!-D_7-7D_6$$
$$=3186-7\cdot 6!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\right]$$
$$=3186-(2520-840+210-42+7)=1331$$

9.10 使用对称筛公式. 设 S 为至多用 k 种颜色涂色 n 条彩带但不允许相邻的彩带涂同色的方案的集合. S 的方案中没用到第 i 色的性质为 P_i, $i=1,2,\cdots,k$. 那么有

$$|S|=k(k-1)^{n-1}=\binom{k}{0}(k-0)(k-1)^{n-1}$$
$$N_1=(k-1)(k-2)^{n-1}$$
$$N_2=(k-2)(k-3)^{n-1}$$
$$\vdots$$
$$N_i=(k-i)(k-i-1)^{n-1}$$
$$\vdots$$
$$N_k=(k-k)(k-k-1)^{n-1}=0$$

代入对称筛公式，得

$$N=\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)(k-i-1)^{n-1}=k\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\binom{k-1}{i}(k-1-i)^{n-1}$$

本题也可以使用递推公式或第二类 Stirling 数的计数模型求解，相关的内容见第10章. 可以证明用这几种方法得到的计数结果是相等的.

9.11 对 n 进行归纳. $D_0=1$, $n=0$ 时命题为真. 假设对一切小于 n 的自然数为真，考虑关于 D_n 的递推方程 $D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$. 若 n 为偶数，那么 $n-1$ 为奇数，$n-2$ 为偶数. 根据归纳假设，D_{n-1} 为偶数，D_{n-2} 为奇数，它们的和为奇数，从而得到 D_n 为奇数. 反之，设 D_n 为奇数. 假若 n 为奇数，那么 $n-1$ 为偶数. 根据递推方程 D_n 也是偶数. 与 D_n 为奇数矛盾.

9.12 设丈夫为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，妻子为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$. x_i 与 y_i 相邻记为性质 p_i, $i=1,2,\cdots,n$. 令 S 为 $2n$ 个人的圆排列的集合，S 中满足性质 p_i 的子集为 A_i, $i=1,2,\cdots,n$.

$$|S|=(2n-1)!$$
$$|A_i|=2(2n-2)!,\qquad i=1,2,\cdots,n$$
$$|A_i\cap A_j|=2^2(2n-3)!\qquad 1\leqslant i<j\leqslant n$$
$$\vdots$$
$$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|=2^n(n-1)!$$

由包含排斥原理有

$$N=(2n-1)!-\binom{n}{1}2(2n-2)!+\binom{n}{2}2^2(2n-3)!$$
$$-\binom{n}{3}2^3(2n-4)!+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}2^n(n-1)!$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^k(2n-k-1)!$$

9.13　令

$S=\{x \mid x$ 是不加任何限制将 15 个人分到 3 个房间的方案$\}$

$A=\{x \mid x\in S$,且第一个房间没有人$\}$

$B=\{x \mid x\in S$,且第二个房间没有人$\}$

$C=\{x \mid x\in S$,且第三个房间没有人$\}$

于是得到

$$|S|=3^{15},\quad |A|=|B|=|C|=2^{15}$$
$$|A\cap B|=|A\cap C|=|B\cap C|=1$$
$$|A\cap B\cap C|=0$$

使用容斥原理得到

$$N=3^{15}-3\times 2^{15}+3-0=14\ 250\ 606$$

注意:本题还可以使用放球的计数模型求解,对应于 15 个不同的球恰好放到 3 个不同盒子的计数.放球模型的计数结果将在第 10 章给出.

9.14　$m=2$,$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$成立.

假设对于任何正整数 $m\geqslant 2$,容斥原理及其推论成立,那么

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{m+1}|=|(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)\cup A_{m+1}|$$
$$=|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|+|A_{m+1}|-|(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)\cap A_{m+1}|$$
$$=\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots$$
$$+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|+|A_{m+1}|$$
$$-|(A_1\cap A_{m+1})\cup(A_2\cap A_{m+1})\cup\cdots\cup(A_m\cap A_{m+1})|$$
$$=\sum_{i=1}^{m+1}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots$$
$$+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|-\sum_{i=1}^{m}|A_i\cap A_{m+1}|$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_{m+1}|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_{m+1}|+\cdots$$
$$+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m\cap A_{m+1}|$$
$$=\sum_{i=1}^{m+1}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m+1}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m+1}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots$$
$$+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{m+1}|$$

9.15　(1)　$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty}r_k(C)x^k=r_0(C)+\sum_{k=1}^{\infty}r_k(C)x^k$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} [r_{k-1}(C_i) + r_k(C_l)] x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} r_{k-1}(C_i) x^k + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(C_l) x^k$$

$$= xR(C_i) + R(C_l)$$

(2)
$$R(C_1)R(C_2) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C_1) x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} r_l(C_1) x^l\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1) r_{k-i}(C_2)\right) x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} r_k(C) x^k = R(C)$$

9.16 设给定棋盘为 C，则 $R(C) = 1 + 6x + 7x^2 + x^3$.

第10章 递推方程与生成函数

10.1 内容提要

1. 递推方程及相关概念

设序列 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$,简记为$\{a_n\}$,一个把 a_n 与某些个 $a_i(i<n)$联系起来的等式叫做关于序列$\{a_n\}$的**递推方程**.

常系数线性齐次递推方程的标准型:

$$\begin{cases}H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=0\\H(0)=b_0,\quad H(1)=b_1,\quad H(2)=b_2,\quad \cdots,\quad H(k-1)=b_{k-1}\end{cases}\tag{10.1}$$

方程(10.1)是 $\boldsymbol{k}$ **阶**递推方程,其中 $b_0,b_1,\cdots,b_{k-1}$是 k 个**初值**.

递推方程(10.1)的特征方程　方程 $x^k-a_1x^{k-1}-\cdots-a_k=0$.

递推方程(10.1)的特征根　特征方程的根.

常系数线性非齐次递推方程的标准型:

$$H(n)-a_1H(n-1)-\cdots-a_kH(n-k)=f(n)\tag{10.2}$$

其中,$n\geqslant k,a_k\neq0,f(n)\neq0$.

2. 公式法求解常系数线性齐次递推方程

关于公式法求解的相关定理:

定理 10.1　设 q 是非零复数,则 q^n是递推方程(10.1)的解当且仅当 q 是它的特征根.

定理 10.2　设 $h_1(n)$和 $h_2(n)$是递推方程(10.2)的解,c_1、c_2为任意常数,则$c_1h_1(n)+c_2h_2(n)$也是这个递推方程的解.

推论　若 $q_1,q_2,\cdots,q_k$是递推方程(10.2)的特征根,则 $c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n$ 是该递推方程的解,其中 $c_1,c_2,\cdots,c_k$是任意常数.

通解　若对递推方程(10.1)的每个解 $h(n)$都存在一组常数 $c_1',c_2',\cdots,c_n'$,使得

$$h(n)=c_1'q_1^n+c_2'q_2^n+\cdots+c_k'q_k^n$$

成立,则称 $c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n$ 为该递推方程的**通解**.

定理 10.3　设 $q_1,q_2,\cdots,q_k$是递推方程(10.1)不等的特征根,则 $H(n)=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\cdots+c_kq_k^n$ 为该递推方程的通解.

定理 10.4　设 $q_1,q_2,\cdots,q_t$是递推方程(10.1)的不等的特征根,且 q_i的重数为 e_i,其中 $i=1,2,\cdots,t$. 令

$$H_i(n)=(c_{i1}+c_{i2}n+\cdots+c_{ie_i}n^{e_i-1})q_i{}^n$$

那么该递推方程的通解是

$$H(n)=\sum_{i=1}^{t} H_i(n)$$

求解步骤：

(1) 列出特征方程.

(2) 求出所有的特征根，并确定每个特征根的重数.

(3) 根据特征根及其重数，写出具有 k 个待定常数的通解表示.

(4) 将初值代入通解表达式，列出关于待定常数的 k 元一次方程组.

(5) 解方程组以确定 k 个待定常数的值.

(6) 将 k 个待定常数的值代入通解.

3. 公式法求解常系数线性非齐次递推方程

关于公式法求解的相关定理：

定理 10.5 设 $\overline{H(n)}$ 是对应的齐次方程(10.1)的通解，$H^*(n)$ 是方程(10.2)一个特解，则

$$H(n)=\overline{H(n)}+H^*(n)$$

是递推方程(10.2)的通解.

某些特殊的特解类型：

(1) 如果 $f(n)$ 为 n 的 t 次多项式，那么特解一般也为 n 的 t 次多项式. 如果原来对应齐次方程的特征根是 1，需要提高特解的多项式次数.

(2) $f(n)$ 为指数函数 $A\beta^n$，这里的 A 代表某个常数. 若 β 不是特征根，则特解为 $P\beta^n$；若 β 是 e 重特征根，则特解为 $Pn^e\beta^n$，其中 P 为待定系数.

(3) $f(n)$ 为多项式函数与指数函数的线性组合，那么特解也为相应的多项式函数与指数函数的线性组合.

求解步骤：

(1) 列出对应齐次递推方程的特征方程.

(2) 求出所有的特征根，并确定每个特征根的重数.

(3) 根据特征根及其重数，写出对应齐次递推方程的通解表示.

(4) 根据函数 $f(n)$ 的类型设定特解的形式.

(5) 将设定的特解代入原递推方程，求出待定系数并确定特解.

(6) 利用对应齐次方程的通解和非齐次方程的特解组合得到原方程的通解.

(7) 将 k 个初值代入通解表达式，列出关于待定常数的 k 元一次方程组.

(8) 解方程组以确定 k 个待定常数的值.

(9) 将 k 个待定常数的值代入通解.

4. 换元法求解递推方程

换元法的基本思想就是：将原来关于某个变元的递推方程，通过函数变换转变成关于其他变元的常系数线性递推方程，然后使用公式法求解. 当得到解以后，再利用相反的变换将解转变成关于原来变元的函数. 换元法仅适用于某些存在变换方法的特殊的递推方程.

注意：

(1) 在对递推方程进行换元时，初值也要进行相应的变换.

(2) 对方程进行换元时要考虑函数定义域的变化.

5. 迭代归纳法求解递推方程

迭代归纳法的基本思想就是：不断将表达式中代表递推方程左部的成分，用同一方程右部的相等成分替代，从而得到一系列的项之和.然后将这个和计算出来或者估计出这个和的近似值.

注意：

(1) 迭代归纳法一般适用于一阶的递推方程，对于某些二阶以上的递推方程，需要先利用差消或者其他的方法进行化简，以降低递推方程的阶数.

(2) 使用迭代法一般需要计算每次迭代所产生的项之和，这里可能会涉及高等数学中级数的求和技术，还有等差、等比数列的求和公式等.可以根据项的变化规律，猜出级数和的表达式，然后使用数学归纳法加以验证.尽管存在各种求和的技术，但是迭代法也只能对一部分方程求得精确的解，有的方程可以使用积分估计出和的近似值，而有的和可能不收敛.

(3) 可以使用**递归树**的模型进行迭代计算.递归树是一棵带权的二叉树，每个结点都有权，这个权是递推方程左部的函数，或者是由递归计算所产生的项.初始的递归树只有一个结点，就是递推方程左部的函数.迭代规则就是把递归树中权为函数的树叶结点，用与这个函数相等的递推方程右部的子树来代替.这种子树只有2层，树根标记为方程右部除了函数之外的剩余表达式——迭代产生的项，每一片树叶则代表方程右部的一个函数项.每迭代一次，递归树就增加一层，直到树叶都变成初值为止.可以采用分层计算的方法算出最终的递归树中所有结点的权之和.

6. 尝试法估计递推方程的解的阶

这种方法的基本思想就是：先将解设定为一个函数，然后代入原递推方程的两边进行验证.如果两边阶最高的函数项相同，那么所设定函数的阶是正确的，否则重新设定函数的阶.经过多次尝试直到找到适当的函数为止.

设定函数时可以先考虑多项式函数 n^k，如果发现解 $f(n)$的阶介于 n^k 与 n^{k+1} 之间，那么可以尝试 $n^{k+\varepsilon}(0<\varepsilon<1)$，$n^k\log n$ 等.

7. 生成函数法求解递推方程

求解步骤：

(1) 将递推方程中的函数 $f(n)$看作级数的项，定义与该级数对应的生成函数.

(2) 利用已知级数的递推方程和初值导出一个关于生成函数的方程.

(3) 解出生成函数.

(4) 将生成函数展开成级数，以求出它的 x^n 项的系数，即 $f(n)$.

8. 递归算法的复杂度分析

分治策略是递归算法设计中的常用技术，它的主要思想是将原问题分解成规模更小的子问题，分别求解每个子问题，然后将子问题的解进行综合，从而得到原问题的解.设 a、b 为正整数，n 为问题的输入规模，n/b 为子问题的输入规模，a 为子问题个数，$d(n)$为将原问题分解成子问题以及将子问题的解综合得到原问题解的代价，那么时间复杂度函数 $T(n)$满足下述方程

$$\begin{cases} T(n)=aT(n/b)+d(n) & n=b^k \\ T(1)=1 \end{cases}$$

当 $d(n)=c$ 时，上述方程的解是

$$T(n)=\begin{cases}O(n^{\log_b a}) & a\neq 1\\ O(\log n) & a=1\end{cases}$$

当 $d(n)=cn$ 时，上述方程的解是

$$T(n)=\begin{cases}O(n) & a<b\\ O(n\log n) & a=b\\ O(n^{\log_b a}) & a>b\end{cases}$$

在算法复杂度的表达式中，$T(n)=O(f(n))$表示函数 $T(n)$的阶不超过函数 $f(n)$的阶，其中 $\log n$ 表示 $\log_2 n$.

9. 牛顿二项式定理与牛顿二项式系数

设 r 为实数，n 为整数，**牛顿二项式系数**

$$\binom{r}{n}=\begin{cases}0 & n<0\\ 1 & n=0\\ \dfrac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} & n>0\end{cases}$$

定理 10.6 牛顿二项式定理.

设 α 为实数，则对一切实数 x、y，$|x/y|<1$，有

$$(x+y)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n y^{\alpha-n},\quad \text{其中}\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

某些重要的展开式：

(1) $(1+x)^{-m}=\dfrac{1}{(1+x)^m}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{m+n-1}{n}x^n \quad |x|<1$

(2) $(1-x)^{-m}=\dfrac{1}{(1-x)^m}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n-1}{n}x^n \quad |x|<1$

$$m=1,\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$$

$$m=2,\quad \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

(3)
$$\begin{aligned}(1+x)^{\frac{1}{2}}&=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k\\
&=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)}{2^k k!}x^k\\
&=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^k k!\cdot 2^{k-1}(k-1)!}x^k\\
&=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}k}\binom{2k-2}{k-1}x^k\end{aligned}$$

10. 生成函数及其性质

生成函数 对于给定序列$\{a_n\}$的形式幂级数

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

生成函数的性质:

设 $A(x)$、$B(x)$、$C(x)$分别表示序列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$的生成函数

(1) 若 $b_n=\alpha a_n$,则 $B(x)=\alpha A(x)$.

(2) 若 $c_n=a_n+b_n$,则 $C(x)=A(x)+B(x)$.

(3) 若 $c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$,则 $C(x)=A(x)\cdot B(x)$.

(4) 若 $b_n=\begin{cases}0 & n<l\\ a_{n-l} & n\geqslant l\end{cases}$, 则 $B(x)=x^lA(x)$.

(5) 若 $b_n=a_{n+l}$,则 $B(x)=\dfrac{A(x)-\sum_{n=0}^{l-1}a_nx^n}{x^l}$.

(6) 若 $b_n=\sum_{i=0}^{n}a_i$,则 $B(x)=\dfrac{A(x)}{1-x}$.

(7) 若 $b_n=\sum_{i=n}^{\infty}a_i$,且 $A(1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_i$ 收敛,则 $B(x)=\dfrac{A(1)-xA(x)}{1-x}$.

(8) 若 $b_n=\alpha^na_n$,α 为常数,则 $B(x)=A(\alpha x)$.

(9) 若 $b_n=na_n$,则 $B(x)=xA'(x)$,其中,$A'(x)$为 $A(x)$的导数.

(10) 若 $b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$,则 $B(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^xA(x)\mathrm{d}x$.

11. 生成函数的应用

(1) 求解递推方程.

(2) 计算多重集的 r 组合数.

(3) 不定方程的解的计数.

(4) 正整数拆分方案的计数.

12. 指数生成函数

设$\{a_n\}$为序列,$\{a_n\}$的**指数生成函数**是

$$G_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$$

指数生成函数的性质 设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的指数生成函数分别为 $A_e(x)$和 $B_e(x)$,则

$$A_e(x)\cdot B_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{x^n}{n!},\quad \text{其中 } c_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_kb_{n-k}$$

指数生成函数的应用 多重集的 r 排列数.

13. 基本的组合计数模型及相关的计数结果

(1) 选取方案计数

设集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$,从 S 中选取 r 个元素的方法数 N,则

无序不重复选取——集合组合:$N=C(k,r)=\dfrac{k!}{r!(k-r)!}$;

有序不重复选取——集合排列:$N=P(n,r)=C(n,r)r!$;

无序可重复选取——多重集 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$的 r 组合:

生成函数

$$A(y)=(1+y+y^2+\cdots+y^{n_1})(1+y+y^2+\cdots+y^{n_2})\cdots(1+y+\cdots+y^{n_k})$$

N 是 $A(y)$ 的展开式中 y^r 的系数.

当 $\forall i=1,2,\cdots,k,n_i\geqslant r,N=C(r+k-1,r)$.

有序可重复选取——多重集 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 的 r 排列：

指数生成函数

$$A_e(y)=\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^{n_1}}{n_1!}\right)\cdot\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^{n_2}}{n_2!}\right)\cdots\left(1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^{n_k}}{n_k!}\right)$$

N 是 $A_e(y)$ 的展开式中 $y^r/r!$ 的系数.

当 $\forall i=1,2,\cdots,k,n_i\geqslant r,A_e(y)=e^{ky}=\sum_{r=0}^{\infty}k^r\frac{y^r}{r!},N=k^r$.

当 $r=n_1+n_2+\cdots+n_k,N=\binom{r}{n_1n_2\cdots n_k}=\frac{r!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

(2) 非降路径计数

基本模型：从 $(0,0)$ 点到 (m,n) 点的非降路径数 $\binom{m+n}{m}$ 或 $\binom{m+n}{n}$.

起点平移：从 (a,b) 点到 (m,n) 点的非降路径数 $\binom{m-a+n-b}{m-a}$.

中间经过某个点：从 (a,b) 点经过 (c,d) 点到 (m,n) 点的非降路径数

$$\binom{c-a+d-b}{c-a}\binom{m-c+n-d}{m-c}$$

限制条件：从 $(0,0)$ 点到 (n,n) 点除端点外中间不接触对角线 $y=x$ 的非降路径数

$$\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

(3) 棋盘布棋方案的计数

基本类型

设 C 为给定棋盘，在 C 上布 k 个棋子，不允许任意两个棋子在同一行与同一列，布棋方案数为 $r_k(C)$，称

$$R(C)=r_0(C)+r_1(C)x+r_2(C)x^2+\cdots+r_k(C)x^k+\cdots$$

称为 C 的棋盘多项式.

棋盘多项式的性质

$$R(C)=xR(C_i)+R(C_l)$$

$$R(C)=R(C_1)R(C_2)$$

其中，C_i 是去掉指定方格所在的行和列之后的剩余棋盘，C_l 是去掉指定方格后的剩余棋盘，C_1 与 C_2 是分离棋盘(没有共同的行和列).

设 C 是 $n\times n$ 的具有给定禁区的棋盘，这个禁区对应于 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的元素在排列中不允许出现的位置，则这种有限制条件的排列数为

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\cdots+(-1)^nr_n$$

其中,r_i 是 i 个棋子布置到禁区的方案数.

(4) 不定方程整数解的计数

基本类型:

方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r \quad x_i\in\mathbf{N},\quad x_i\leqslant n_i,\quad i=1,2,\cdots,k$

生成函数为

$$G(y)=(1+y+\cdots+y^{n_1})(1+y+\cdots+y^{n_2})\cdots(1+y+\cdots+y^{n_k})$$

N 是 $G(y)$ 的展开式中 y^r 的系数.

当

$$\forall i=1,2,\cdots,k,n_i\geqslant r \quad N=C(r+k-1,r)$$

变量取值受限的类型:

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=r,\quad l_i\leqslant x_i\leqslant n_i,\quad i=1,2,\cdots,k$$

生成函数

$$G(y)=(y^{l_1}+y^{l_1+1}+\cdots+y^{n_1})(y^{l_2}+y^{l_2+1}+\cdots+y^{n_2})\cdots(y^{l_k}+y^{l_k+1}+\cdots+y^{n_k})$$

N 是 $G(y)$ 的展开式中 y^r 的系数.

带正整数系数的类型:

$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k=r \quad x_i\in\mathbf{N},\quad p_1,p_2,\cdots,p_k\text{为正整数}$$

生成函数

$$G(y)=(1+y^{p_1}+y^{2p_1}+\cdots)(1+y^{p_2}+y^{2p_2}+\cdots)\cdots(1+y^{p_k}+y^{2p_k}+\cdots)$$

N 是 $G(y)$ 的展开式中 y^r 的系数.

(5) 正整数拆分方案计数

无序拆分:

设 N 是给定正整数,将 N 无序拆分成正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$.

等价于不定方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=N$ 的非负整数解的计数问题.

不允许重复,生成函数是

$$G(y)=(1+y^{a_1})(1+y^{a_2})\cdots(1+y^{a_n})$$

允许重复,生成函数是

$$\begin{aligned}G(y)&=(1+y^{a_1}+y^{2a_1}+\cdots)(1+y^{a_2}+y^{2a_2}+\cdots)\cdots(1+y^{a_n}+y^{2a_n}+\cdots)\\&=\frac{1}{(1-y^{a_1})(1-y^{a_2})\cdots(1-y^{a_n})}\end{aligned}$$

拆分后的数的个数不超过 r:

等价于将 N 无序并允许重复地拆分成大小不超过 r 的正整数的问题.

有序拆分:

将 N 允许重复地有序拆分成 r 个部分的方案数为 $C(N-1,r-1)$.

对正整数 N 做任意重复的有序拆分,方案数为 $\sum_{r=1}^{N}\binom{N-1}{r-1}=2^{N-1}$.

(6) 放球方案的计数(见表10.1).

14. 计数符号及其组合意义

(1) 排列数 $P(n,r)$

组合含义:n 元集合的 r 排列个数.

表 10.1

球区别	盒区别	是否空盒	模型	方 案 计 数
有	有	有	选取	m^n
有	有	无	放球子模型	$m!\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}$
有	无	有		$\sum_{k=1}^{m}\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}$
有	无	无		$\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}$
无	有	有	不定方程	$C(n+m-1,n)$
无	有	无		$C(n-1,m-1)$
无	无	有	正整数拆分	$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$，$x^n$ 系数
无	无	无		$G(x)=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$，$x^n$ 系数

恒等式：$P(n,r)=r!C(n,r)$.

指数生成函数：$G_e(x)=(1+x)^n$.

(2) 组合数(二项式系数)$C(n,r)$

组合意义：n 元集合的 r 组合个数.

　　　　二项式$(1+x)^n$的展开式中 x^r项的系数.

恒等式(见第 8 章的内容提要).

生成函数：$G(x)=(1+x)^n$.

(3) 多项式系数$\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_k}$

组合意义：多重集的全排列数.

　　　　多项式$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$的展开式中 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$项的系数.

恒等式：

$$\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

$\sum\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_t}=t^n$，其中，求和是对方程 $n_1+n_2+\cdots n_t=n$ 的所有的非负整数解求和.

$$\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_t}=\binom{n-1}{n_1-1 n_2\cdots n_t}+\binom{n-1}{n_1 n_2-1\cdots n_t}+\cdots+\binom{n-1}{n_1 n_2\cdots n_t-1}$$

(4) Fibonacci 数 f_n

组合意义：兔子对的计数.

恒等式：

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\quad f_0=1,\quad f_1=1$$

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

(5) 错位排列数 D_n

组合意义：由 $1,2,\cdots,n$ 构成排列 $i_1i_2\cdots i_n$，满足 $i_j\neq j$ 的排列个数.

恒等式：

$$D_n=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

$$\begin{cases}D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})\\D_1=0,\quad D_2=1\end{cases}$$

$$n!=\binom{n}{0}D_n+\binom{n}{1}D_{n-1}+\binom{n}{2}D_{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}D_0$$

其中 $D_0=1$.

(6) Catalan 数 h_n

组合意义：由内部不相交的对角线把凸 $n+1$ 边形划分成三角形的划分方案数；

从$(0,0)$点到(n,n)点除端点外不接触对角线的非降路径计数；

n 个元素的堆栈输出序列的计数；

n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 相乘，不交换数的位置的乘法顺序计数；

圆周上 $2n$ 个点用不在内部相交的弦两两配对的方案计数.

恒等式：

$$h_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

$$\begin{cases}h_n=\sum_{k=1}^{n-1}h_kh_{n-k} & n\geqslant 2\\h_1=1\end{cases}$$

生成函数：$H(x)=\sum_{n=1}^{\infty}h_nx^n=\dfrac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}$.

(7) 第一类 Stirling 数

组合意义：多项式 $x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ 的展开式

$$S_nx^n-S_{n-1}x^{n-1}+S_{n-2}x^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}S_1x$$

中 x^r 的系数的绝对值 S_r，记作 $\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}$.

n 元置换群 S_n 中含有 r 个轮换的置换个数.

恒等式：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}=(n-1)\begin{bmatrix}n-1\\r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n-1\\r-1\end{bmatrix} & n>r\geqslant 1\\\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=0,\quad \begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}=(n-1)!\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}=1$$

$$\begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix}=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{r=1}^{n}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}=n!$$

(8) 第二类 Stirling 数

组合意义：n 个不同的球恰好放到 r 个相同的盒子里的方法数，记作 $\left\{\begin{matrix}n\\r\end{matrix}\right\}$.

n 元集含有 k 个划分块的划分个数.

从 n 元集到 k 元集的满射函数计数为 $k!\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}$.

恒等式：

$$\begin{cases}\left\{\begin{matrix}n\\r\end{matrix}\right\}=r\left\{\begin{matrix}n-1\\r\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}n-1\\r-1\end{matrix}\right\}\\ \left\{\begin{matrix}n\\0\end{matrix}\right\}=0,\quad \left\{\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right\}=1\end{cases}$$

$$\left\{\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right\}=2^{n-1}-1$$

$$\left\{\begin{matrix}n\\n-1\end{matrix}\right\}=\binom{n}{2}$$

$$\left\{\begin{matrix}n\\n\end{matrix}\right\}=1$$

$\sum\binom{n}{n_1 n_2\cdots n_m}=m!\left\{\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}$，其中 $\sum$ 对满足 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$ 的正整数解求和

$$\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}k!=m^n$$

$$\left\{\begin{matrix}n+1\\r\end{matrix}\right\}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left\{\begin{matrix}i\\r-1\end{matrix}\right\}$$

10.2 习　　题

10.1　设有递推方程 $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$，$n\geqslant 2$，且 $L_0=2$，$L_1=1$，求：$L_{2n+2}-(L_1+L_3+\cdots+L_{2n+1})$.

10.2　求解递推方程.

(1) $\begin{cases}a_n-7a_{n-1}+12a_{n-2}=0\\ a_0=4,a_1=6\end{cases}$

(2) $\begin{cases}a_n+a_{n-2}=0\\ a_0=0,a_1=2\end{cases}$

(3) $\begin{cases}a_n+6a_{n-1}+9a_{n-2}=3\\ a_0=0,a_1=1\end{cases}$

(4) $\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 1 \\ a_0 = 4, a_1 = 6 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 3^n \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$

10.3　求解下述递推方程.

(1) $\begin{cases} na_n + (n-1)a_{n-1} = 2^n & n \geqslant 1 \\ a_0 = 273 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_n - na_{n-1} = n! & n \geqslant 1 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

10.4　已知方程 $C_0 H_n + C_1 H_{n-1} + C_2 H_{n-2} = 6$ 的解是 $3^n + 4^n + 2$,求 C_1.

10.5　求以凸 n 边形的顶点为顶点,以内部对角线为边的不同的三角形的个数.

10.6　有 n 条封闭的曲线,两两相交于两点,并且任意三条都不交于一点,求这 n 条封闭曲线把平面划分成的区域个数.

10.7　某公司有 n 千万元可以用于对 a、b、c 三个项目的投资.假设每年投资一个项目,投资的规则是:或者对 a 投资 1 千万元,或者对 b 投资 2 千万元,或者对 c 投资 2 千万元.问:用完 n 千万元有多少种不同的方案?

10.8　求 n 位 0-1 串中相邻两位不出现 11 的串的个数.

10.9　一个质点在水平方向运动,每秒钟它走过的距离等于它前一秒走过距离的 2 倍.设质点的初始位置为 3,并设第一步走了 1 个单位长的距离.求第 t 秒钟质点的位置.

10.10　如图 10.1 所示,T 为 $2n$ 个顶点的树,求 T 的所有点独立集(包含空集在内)的个数 f_n.

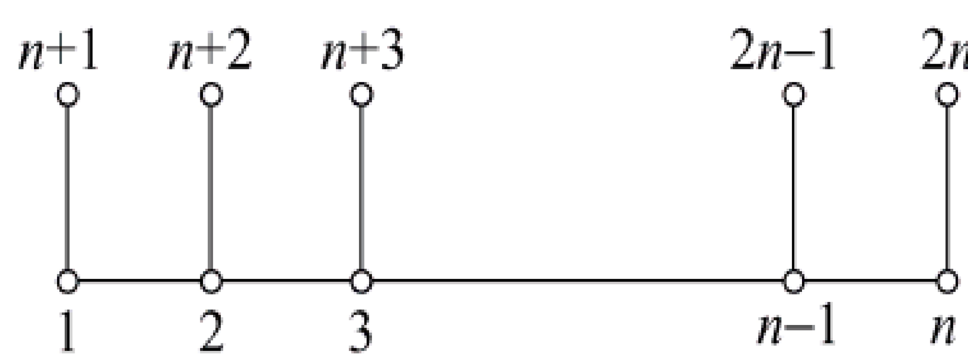


图　10.1

10.11　双 Hanoi 塔问题是 Hanoi 塔问题的一种推广,与 Hanoi 塔的不同点在于:$2n$ 个圆盘,分成大小不同的 n 对,每对圆盘完全相同.初始,这些圆盘按照从大到小的次序从下到上放在 A 柱上,最终要把它们全部移到 C 柱,移动的规则与 Hanoi 塔相同.

(1) 设计一个移动的算法;

(2) 计算你的算法所需要的移动次数.

10.12　设 A 是 n 个不相等的正整数构成的集合,其中,$n = 2^k$,k 为正整数.考虑下述在 A 中找最大和最小的算法 MaxMin.先将 A 划分成相等的两个子集 A_1 与 A_2.用算法 MaxMin 递归地在 A_1 与 A_2 中找最大数与最小数.令 a_1, a_2 分别表示 A_1 与 A_2 中的最大数,b_1 与 b_2 分别表示 A_1 与 A_2 中的最小数,那么 $\max(a_1, a_2)$ 与 $\min(b_1, b_2)$ 就是所需要的结果.计算对于规模为 n 的输入,算法 Maxmin 最坏情况下所做的比较次数.

10.13　一个 $1 \times n$ 的方格图形用红、蓝两色涂色每个方格,如果每个方格只能涂一种颜色,且不允许两个红格相邻,问:有多少种涂色方案?

10.14　已知数列 $\{a_n\}$ 的生成函数是 $A(x) = (1 + x - x^2)/(1 - x)$,求 a_n.

10.15　设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 的生成函数分别为 $A(x), B(x), C(x)$,其中 $a_n = 0$ $(n \geqslant 3)$,$a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 2$;$c_n = 5^n$,$n \in \mathbf{N}$.如果 $A(x)B(x) = C(x)$,求 b_n.

10.16 分别确定下述数列$\{a_n\}$的生成函数，其中：

(1) $a_n=(-1)^n(n+1)$

(2) $a_n=(-1)^n 2^n$

(3) $a_n=n+5$

(4) $a_n=\binom{n}{3}$

10.17 证明生成函数的性质.

10.18 使用生成函数求解递推方程 $a_k=3a_{k-1}$，$k=1,2,3,\cdots$且初始条件 $a_0=2$.

10.19 把 15 个相同的动物玩具分给 6 个孩子，使得每个孩子至少得到 1 个但不超过 3 个，使用生成函数确定不同的分法数.

10.20 使用两个不同的信号在通信信道发送信息，传送一个信号需要 $2\mu s$，传送另一个信号要 $3\mu s$. 一个信息的每个信号紧跟着下一个信号.

(1) 设 a_n 是在 $n\mu s$ 可以发送的不同信号数，求与 a_n 有关的递推方程.

(2) 对于(1)的递推方程，初始条件是什么？

(3) 用 $12\mu s$ 可以发送多少个不同的信息？

10.21 如果传送信号 A 要 $1\mu s$，传送信号 B 和 C 各需要 $2\mu s$，一个信息是字符 A、B 或 C 构成的有限长度的字符串(不考虑空串)，问：用 $n\mu s$ 可以传送多少个不同的信息？

10.22 设 a_r是用 3 元、4 元和 20 元的邮票在邮件上贴满 r 元邮费的方式数. 求$\{a_r\}$的生成函数.

(1) 假设不考虑贴邮票的次序.

(2) 假设邮票贴成一行并且考虑贴的次序.

10.23 把 n 个苹果(n 为奇数)恰好分给 3 个孩子，如果第一个孩子和第二个孩子分的苹果数不相同，问有多少种分法？

10.24 设 n 为自然数，求平面上由直线 $x+2y=n$ 与两个坐标轴所围成的直角三角形内(包括边上)的整点个数，其中整点表示横、纵坐标都是整数的点.

10.25 设三角形 ABC 的边长为整数，且 $AB+BC+AC$ 为奇数 $2n+1$，其中 n 为给定的正整数. 问：这样的三角形有多少个？

10.26 设 Σ 是一个字母表且$|\Sigma|=n>1$，a 和 b 是 Σ 中两个不同的字母. 试求 Σ上的 a 和 b 均出现的长为 $k>1$ 的字(或称为字符串)的个数.

10.27 冯·诺依曼邻居问题. 某种细胞的增长遵照下述规则，每一次增长都是在上次的图形外面增加一圈方格. 图 10.2 的三个图分别表示了初始格局及第 1 次、第 2 次增长后的细胞格局. 如果第 n 次增长后阴影部分的方格数记作 $T(n)$(即 n 阶冯诺依曼邻居中的元胞数)，列出关于 $T(n)$的递推方程及初值，求出 $T(n)$.

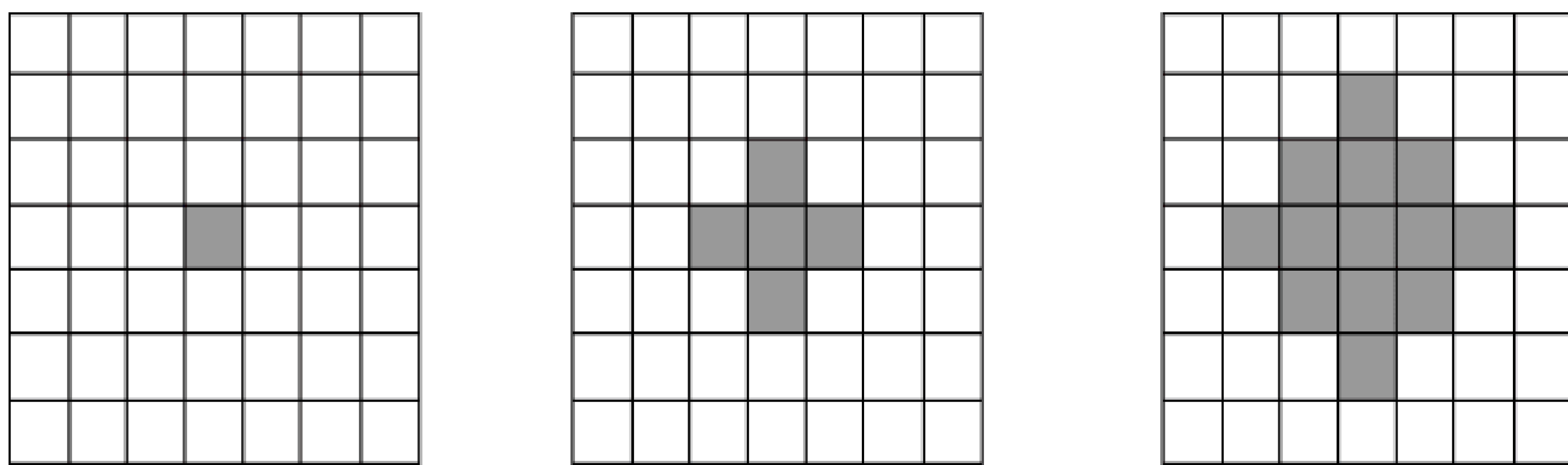


图 10.2

10.28　设多重集 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\infty\cdot a_3,\infty\cdot a_4\}$，$c_n$是 S 的满足以下条件的 n-组合数，且数列$\{c_n\}$的生成函数为 $C(x)$，求 $C(x)$.

(1) 每个 a_i出现奇数次，$i=1,2,3,4$.

(2) a_1不出现，a_2至多出现1次.

(3) 每个 a_i至少出现10次.

10.29　分别确定下面数列$\{a_n\}$的指数生成函数，其中：

(1) $a_n=n!$.

(2) $a_n=2^n\cdot n!$.

(3) $a_n=(-1)^n$.

10.30　一个 $1\times n$ 的方格图形用红、蓝、绿或橙色四种颜色涂色，如果有偶数个方格被涂成红色，还有偶数个方格被涂成绿色，问：有多少种方案？

10.31　把 n 本不同的书分给 A、B、C、D 4个人，使得 A 至少得1本，C 与 D 得到的书的数目同为奇数或者同为偶数，问这样的方法有多少种？

10.32　由 A,B,C,D,E,F 构成长度为 n 的序列，如果要求在排列中 A 与 B 出现的次数之和为偶数，问这样的排列有多少个？

10.33　设 $A=\{1,2,\cdots,2n\}$，$B=\{1,2,\cdots,5\}$是有穷集. 现在构造从 A 到 B 的函数 $f:A\to B$，如果对于任意 $y\in \mathrm{ran}f$，都有$|f^{-1}(y)|$等于偶数，其中，$f^{-1}(y)=\{x|\ x\in A\wedge f(x)=y\}$表示 y 的完全原像. 求满足上述条件的不同的函数 f 有多少个？

10.34　确定由 n 个奇数字组成并且1和3每个数字出现偶数次的数的个数.

10.35　证明：

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{ n \atop k \right\} x(x-1)\cdots(x-k+1)=x^n$$

10.36　把5项任务分给4个人，如果每个人至少得到1项任务，问：有多少种方式？

10.3　习题解答与分析

10.1　解：

$$\begin{aligned}&L_{2n+2}-(L_1+L_3+\cdots+L_{2n+1})\\&=(L_{2n+2}-L_{2n+1})-(L_1+L_3+\cdots+L_{2n-1})\\&=(L_{2n}-L_{2n-1})-(L_1+L_3+\cdots+L_{2n-3})\\&=\cdots\\&=L_2-L_1=L_0=2\end{aligned}$$

10.2　(1) 特征方程为 $x^2-7x+12=0$，通解为

$$a_n=c_1 3^n+c_2 4^n$$

代入初值，得到

$$\begin{cases}c_1+c_2=4\\3c_1+4c_2=6\end{cases}$$

解得 $c_1=10$，$c_2=-6$，从而得到原递推方程的解为

$$a_n=10\times 3^n-6\times 4^n$$

(2) 特征方程为 $x^2+1=0$,通解为

$$a_n=c_1\mathrm{i}^n+c_2(-\mathrm{i})^n$$

代入初值,得到

$$\begin{cases}c_1+c_2=0\\ \mathrm{i}c_1+(-\mathrm{i})c_2=2\end{cases}$$

解得 $c_1=-\mathrm{i},c_2=\mathrm{i}$,从而得到原递推方程的解为

$$a_n=-\mathrm{i}^{n+1}+(-1)^n\mathrm{i}^{n+1}$$

于是原方程的解是

$$a_{2k}=0,\quad a_{2k+1}=2(-1)^k,\quad k\in\mathbf{N}$$

(3) 特征方程为 $x^2+6x+9=0$,齐次通解为

$$\overline{a}_n=c_1(-3)^n+c_2n(-3)^n$$

设特解为 P,代入方程得到

$$P+6P+9P=3$$

解得 $P=3/16$.因此原递推方程的通解为

$$a_n=c_1(-3)^n+c_2n(-3)^n+\frac{3}{16}$$

代入初值,解得 $c_1=-3/16,c_2=-1/12$.从而得到原递推方程的解为

$$a_n=\left(-\frac{1}{12}n-\frac{3}{16}\right)(-3)^n+\frac{3}{16}$$

(4) 特征方程为 $x^2-3x+2=0$,齐次通解为

$$\overline{a}_n=c_11^n+c_22^n$$

因为1是特征根,设特解为 Pn,代入方程得到 $P=-1$.因此原递推方程的通解为

$$a_n=c_11^n+c_22^n-n$$

代入初值,解得 $c_1=1,c_2=3$,从而得到原递推方程的解为

$$a_n=3\times2^n-n+1$$

(5) 特征方程为 $x^2-7x+10=0$,齐次通解为

$$\overline{a}_n=c_12^n+c_25^n$$

设特解为 $P3^n$,代入方程得到 $P=-\dfrac{9}{2}$.因此原递推方程的通解为

$$a_n=c_12^n+c_25^n-\frac{9}{2}\times3^n$$

代入初值解得 $c_1=\dfrac{8}{3},c_2=\dfrac{11}{6}$,从而得到原递推方程的解为

$$a_n=\frac{8}{3}\times2^n+\frac{11}{6}\times5^n-\frac{9}{2}\times3^n$$

10.3 (1) 令 $b_n=na_n$,代入原递推方程得

$$\begin{cases}b_n+b_{n-1}=2^n\\ b_0=0\end{cases}$$

解得 $b_n=-\dfrac{2}{3}(-1)^n+\dfrac{2^{n+1}}{3}$,从而得到

$$\begin{cases} a_n=-\frac{2}{3n}(-1)^n+\frac{2^{n+1}}{3n} & n\geqslant 1 \\ a_0=273 \end{cases}$$

(2) 由迭代得到 $a_n=n!(n+2)$,经归纳法验证,它是原递推方程的解.

10.4 **方法1** 根据题意,递推方程的解为 $H_n=3^n+4^n+2$,令 $n=0,1,2,3$,代入得

$$H_0=4,\quad H_1=9,\quad H_2=27,\quad H_3=93,\quad H_4=339$$

将上述值代入已知条件,得下述方程组

$$\begin{cases} 27C_0+9C_1+4C_2=6 \\ 93C_0+27C_1+9C_2=6 \\ 339C_0+93C_1+27C_2=6 \end{cases}$$

解得 $C_0=\frac{1}{2}$,$C_1=-\frac{7}{2}$,$C_2=6$.

方法2 由已知条件递推方程具有下述形式:

$$H_n+\frac{C_1}{C_0}H_{n-1}+\frac{C_2}{C_0}H_{n-2}=\frac{6}{C_0}$$

由于它的解是 $H_n=3^n+4^n+2$,因此上述递推方程的特征根是3和4,特解是2.从而知道这个递推方程也具有下面的形式:

$$H_n-7H_{n-1}+12H_{n-2}=P$$

对比这个方程的两种形式,得到 $C_1=-7C_0$,$C_2=12C_0$.

下面计算 C_0.由于特解是2,因此得到

$$\frac{6}{C_0}=P=2-7\times 2+12\times 2=12$$

从而得到 $C_0=\frac{1}{2}$.再利用前面的结果得到 $C_1=-\frac{7}{2}$,$C_2=6$.

10.5 **方法1** 全部可能的三角形数 $C(n,3)$,其中以1条多边形边作为边的三角形数是 $n(n-4)$,以2条多边形边作为边的三角形数是 n,于是得到

$$N=C(n,3)-n(n-4)-n=n(n-4)(n-5)/6$$

方法2 建立递推方程.设原来的 $n-1$ 边形的顶点是 $1,2,\cdots,n-1$.加入顶点 n 以后,n 与 $\{2,3,\cdots,n-2\}$ 中的任何两个顶点都能构成一个新的三角形,这样的新三角形有 $C(n-3,2)$ 个.但是其中 $n-4$ 个三角形含有多边形的1条边.因此仅由对角线构成的三角形有 $C(n-3,2)-(n-4)$ 个.此外,原来 $n-1$ 边形的边 $\{1,n-1\}$ 在 n 边形中变成了对角线,由这条对角线与 $\{3,4,\cdots,n-3\}$ 中的任何顶点都可以构成一个新三角形,且这个三角形的三条边都是 n 边形的对角线.因此又增加了 $(n-5)$ 个三角形.令 A_n 表示所有的三角形数,那么 A_n 满足如下递推方程

$$\begin{cases} A_n=A_{n-1}+C(n-3,2)-(n-4)+(n-5) \\ A_6=2 \end{cases}$$

解得 $A_n=n(n-4)(n-5)/6$.

10.6 设 a_n 为 n 条封闭曲线把平面划分成的区域个数.假设前 n 条封闭曲线已经存在,当加入第 $n+1$ 条封闭曲线时,这条曲线与前 n 条曲线交于 $2n$ 个点,这些交点将第 $n+1$ 条曲线划分成 $2n$ 段,每段都会增加一个区域,因此得到递推方程

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n \\ a_1=2 \end{cases}$$

解得 $a_n=n^2-n+2$.

10.7　设 n 千万元的投资方案数为 $f(n)$，那么 $f(n)$ 满足如下递推方程

$$\begin{cases} f(n)=f(n-1)+2f(n-2) \\ f(1)=1, \quad f(2)=3 \end{cases}$$

解得 $f(n)=\dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$.

10.8　设 a_n 是不含两个连续 1 的 n 位 0-1 字符串的个数，b_n 是以 1 结尾且不含两个连续 1 的 n 位 0-1 字符串的个数，c_n 是以 0 结尾且不含两个连续 1 的 n 位 0-1 字符串的个数，那么 $a_n=b_n+c_n$. 且满足如下递推方程

$$b_n=c_{n-1}$$

$$\begin{cases} c_n=b_{n-1}+c_{n-1}=c_{n-1}+c_{n-2} \\ c_1=1, \quad c_2=2 \end{cases}$$

解得

$$c_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

$$a_n=b_n+c_n=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

10.9　设 $f(t)$ 为第 t 秒时质点的位置，则

$$f(t)-f(t-1)=2(f(t-1)-f(t-2))$$

化简并给出初值得

$$\begin{cases} f(t)-3f(t-1)+2f(t-2)=0 \\ f(0)=3, \quad f(1)=4 \end{cases}$$

该方程为常系数线性齐次递推方程，解得 $f(t)=2^t+2$.

10.10　将这个图的点独立集分成两类：含有顶点 n 的和不含有顶点 n 的. 如果含有顶点 n，那么一定不含有顶点 $2n$ 和 $n-1$，但是可以含有或者不含有顶点 $2n-1$. 对其他顶点的取舍有 f_{n-2} 种方法. 如果不含有顶点 n，那么可以含有或者不含有顶点 $2n$，对其他顶点的取舍有 f_{n-1} 种方法. 于是得到递推方程

$$\begin{cases} f_n=2f_{n-1}+2f_{n-2} \\ f_0=1, \quad f_1=2 \end{cases}$$

解得

$$f_n=\frac{3+\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n+\frac{3-\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n$$

10.11　(1) 算法分三步，具体步骤如下：

① 递归地将上面的 $2(n-1)$ 个盘子从 A 柱移到 B 柱；

② 用2次移动将最大的2个盘子从 A 柱移到 C 柱；

③ 递归地将 B 柱的 $2(n-1)$ 个盘子从 B 柱移到 C 柱.

(2) 设 $2n$ 个圆盘的移动次数是 $T(n)$，则

$$\begin{cases} T(n)=2T(n-1)+2 \\ T(1)=2 \end{cases}$$

通过迭代解得

$$T(n)=2^{n+1}-2$$

10.12 设算法对于规模为 n 的输入在最坏情况下的比较次数是 $T(n)$，那么有

$$\begin{cases} T(n)=2T(n/2)+2 \\ T(2)=1 \end{cases}$$

通过迭代解得

$$T(n)=3n/2-2$$

10.13 设 a_n 是 n 个方格的涂色方案数，将这些方案按照最后一个方格是红色和蓝色分成两类. 如果最后一个方格是红色，那么相邻的方格一定是蓝色，这种方案有 a_{n-2} 种；如果最后一个方格是蓝色，这种方案有 a_{n-1} 种，因此得到递推方程

$$\begin{cases} a_n=a_{n-1}+a_{n-2} \\ a_1=2, \quad a_2=3 \end{cases}$$

从而解得

$$a_n=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

10.14 $A(x)=\dfrac{1+x-x^2}{1-x}=x+\dfrac{1}{1-x}=x+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$

从而得到 $a_n=1(n\neq1)$，$a_1=2$.

10.15 **方法1** 根据题意给出递推方程

$$a_0b_0=c_0 \Rightarrow b_0=1$$

$$a_0b_1+a_1b_0=c_1 \Rightarrow b_1=2$$

$$a_2b_{n-2}+a_1b_{n-1}+a_0b_n=c_n \Rightarrow b_n+3b_{n-1}+2b_{n-2}=5^n$$

将已知条件代入得

$$\begin{cases} b_n+3b_{n-1}+2b_{n-2}=5^n \\ b_0=1, \quad b_1=2 \end{cases}$$

解得 $b_n=\dfrac{4}{7}(-2)^n-\dfrac{1}{6}(-1)^n+\dfrac{5^{n+2}}{42}$.

方法2 根据已知条件得到

$$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}5^nx^n=\frac{1}{1-5x}, \quad A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1+3x+2x^2$$

于是得到

$$\begin{aligned} B(x)&=\frac{C(x)}{A(x)}=\frac{1}{(1-5x)(1+3x+2x^2)} \\ &=\frac{25}{42}\times\frac{1}{1-5x}+\frac{4}{7}\times\frac{1}{1+2x}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

$$=\frac{25}{42}\sum_{n=0}^{\infty}5^n x^n+\frac{4}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

从而得到

$$b_n=\frac{5^{n+2}}{42}+\frac{4}{7}(-2)^n-\frac{1}{6}(-1)^n$$

10.16 (1) $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$

$$\Rightarrow\int_0^x A(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x(n+1)x^n\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\int_0^x A(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+1}=\frac{x}{1+x}$$

$$\Rightarrow A(x)=\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{(1+x)^2}$$

(2) $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n=\frac{1}{1+2x}$

(3) $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}4x^n$

令 $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$，则

$$\int_0^x B(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x}{1-x}\Rightarrow B(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

从而得到

$$A(x)=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{4}{1-x}=\frac{5-4x}{(1-x)^2}$$

(4) 与前面(1)和(3)小题类似，利用级数积分的性质，最终得到生成函数 $\frac{x^3}{(1-x)^4}$.

10.17 性质1 $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha a_n x^n=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\alpha A(x)$

性质2 $C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=A(x)+B(x)$

性质3 根据条件列出下述等式

$$\begin{aligned}
&c_0=a_0b_0\\
&c_1x=a_0b_1x+a_1b_0x\\
&c_2x^2=a_0b_2x^2+a_1b_1x^2+a_2b_0x^2\\
&\quad\vdots\\
&c_nx^n=a_0b_nx^n+a_1b_{n-1}x^n+\cdots+a_nb_0x^n\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

将以上各式两边分别相加并化简，得到

$$C(x)=a_0B(x)+a_1xB(x)+\cdots+a_nx^nB(x)+\cdots=A(x)\cdot B(x)$$

性质4 $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=l}^{\infty}a_{n-l}x^n=x^l\sum_{n=l}^{\infty}a_{n-l}x^{n-l}=x^l\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=x^lA(x)$

性质 5 $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+l}x^n$

$$\Rightarrow B(x)\cdot x^l=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+l}x^{n+l}=A(x)-\sum_{n=0}^{l-1}a_nx^n$$

$$\Rightarrow B(x)=\frac{1}{x^l}\left(A(x)-\sum_{n=0}^{l-1}a_nx^n\right)$$

性质 6 根据已知条件列出下述等式

$$\begin{aligned}&b_0=a_0\\&b_1x=a_0x+a_1x\\&b_2x^2=a_0x^2+a_1x^2+a_2x^2\\&\qquad\vdots\\&b_nx^n=a_0x^n+a_1x^n+\cdots+a_nx^n\\&\qquad\vdots\end{aligned}$$

将上式两边相加,得到

$$\begin{aligned}B(x)&=a_0(1+x+x^2+\cdots)+a_1x(1+x+x^2+\cdots)+\cdots+a_nx^n(1+x+x^2+\cdots)+\cdots\\&=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)\\&=\frac{A(x)}{1-x}\end{aligned}$$

性质 7 因为 $A(1)$收敛,所以 $b_n=\sum_{i=n}^{\infty}a_i$ 存在.

$$\begin{aligned}&b_0=a_0+a_1+a_2+\cdots=A(1)\\&b_1x=a_1x+a_2x+\cdots=[A(1)-a_0]x\\&b_2x^2=a_2x^2+\cdots=[A(1)-a_0-a_1]x^2\\&\qquad\vdots\\&b_nx^n=a_nx^n+\cdots=[A(1)-a_0-\cdots-a_{n-1}]x^n\\&\qquad\vdots\end{aligned}$$

将上式两边分别相加并化简,命题得证.

性质 8 $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^na_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\alpha x)^n=A(\alpha x)$

性质 9 $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

对 x 求导得到

$$A'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\frac{1}{x}B(x)$$

于是 $B(x)=xA'(x)$.

性质 10 $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$

$$\frac{1}{x}\int_0^xA(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$$

10.18 根据生成函数定义,得到

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=2+\sum_{k=1}^{\infty}3a_{k-1}x^k=2+3x\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=2+3xA(x)$$

解得

$$(1-3x)A(x)=2$$

$$\Rightarrow A(x)=\frac{2}{1-3x}=2\sum_{k=0}^{\infty}3^kx^k$$

于是得到 $a_k=2\times3^k$.

10.19　设 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 分别表示 6 个孩子得到的玩具数目,因此得到如下不定方程

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_6=15\\1\leqslant x_i\leqslant3\qquad x_i\in\mathbf{N},\quad i=1,2,3,4,5,6\end{cases}$$

该方程对应的生成函数是

$$G(x)=(y+y^2+y^3)^6=y^6(1+y+y^2)^6$$

上述多项式展开式中 y^{15} 的系数就是 $(1+y+y^2)^6$ 的展开式中 y^9 的系数. 于是得到

$$\begin{aligned}(1+y+y^2)^6&=\cdots+C(6,3)(1+y)^3(y^2)^3+C(6,4)(1+y)^2(y^2)^4+\cdots\\&=\cdots+20(1+3y+3y^2+y^3)y^6+15(1+2y+y^2)y^8+\cdots\\&=\cdots+20y^9+30y^9+\cdots=\cdots+50y^9+\cdots\end{aligned}$$

于是得到方程的正整数解有 50 个,即分配玩具有 50 种方法.

10.20　(1) 设 a_n 表示 $n\mu$s 传送的不同的信息数,那么

$$a_n=a_{n-2}+a_{n-3}$$

(2) $a_1=0,a_2=1,a_3=1$.

(3) 从 $a_4=a_2+a_1,a_5=a_3+a_2,\cdots$,顺序计算可得 $a_{12}=12$.

10.21　设 a_n 表示 $n\mu$s 送的不同信息数,那么得到递推方程如下

$$\begin{cases}a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}\\a_1=1,\quad a_2=3\end{cases}$$

解得　$a_n=\dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$.

10.22　(1) 如果不考虑邮票的顺序,每种邮票使用的张数不同决定了不同的方案. 设 3 元、4 元和 20 元的邮票分别使用 x_1、x_2 和 x_3 张,则得到下述方程

$$3x_1+4x_2+20x_3=r$$
$$x_i\in\mathbf{N},\quad i=1,2,3$$

于是,生成函数为

$$G(y)=\frac{1}{(1-y^3)(1-y^4)(1-y^{20})}$$

$G(y)$ 的展开式中 y^r 的系数就是方案数.

(2) 如果考虑邮票的顺序,那么贴 k 张邮票可能得到的总邮资数值由 $(y^3+y^4+y^{20})^k$ 中 y 的幂指数确定,而对于给定的邮资,其系数则代表了用 k 张邮票贴出这种邮资的方法数. 如

$$(y^3+y^4+y^{20})^3=\binom{3}{300}(y^3)^3+\binom{3}{210}(y^3)^2y^4+\binom{3}{201}(y^3)^2y^{20}+\binom{3}{120}(y^3)(y^4)^2$$

$$+\binom{3}{102}(y^3)(y^{20})^2+\binom{3}{021}(y^4)^2y^{20}+\binom{3}{012}y^4(y^{20})^2$$
$$+\binom{3}{111}y^3y^4y^{20}+\binom{3}{003}(y^{20})^3+\binom{3}{030}(y^4)^3$$
$$=y^9+3y^{10}+3y^{26}+3y^{11}+3y^{43}+3y^{28}+3y^{44}+6y^{27}+y^{60}+y^{12}$$

这说明用3张邮票贴9元邮资只有1种方法，贴11元邮资有3种方法，即：3+4+4，4+4+3，4+3+4.…根据上述分析，考虑邮票顺序情况下的生成函数是

$$1+(y^3+y^4+y^{20})+(y^3+y^4+y^{20})^2+\cdots=\frac{1}{1-(y^3+y^4+y^{20})}$$

上述展开式中 y^r 的系数就是贴出 r 元邮资的方法数.

10.23　每个孩子至少得到一个苹果的分法数是方程 $x_1+x_2+x_3=n-3$ 的非负整数解的个数，其生成函数为

$$A(y)=(1+y+y^2+\cdots)^3=\frac{1}{(1-y)^3}$$

上述展开式中 y^{n-3} 项的系数为 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

前两个孩子苹果数相等的分法数为方程 $2x_1+x_3=n-3$ 的非负整数解个数. 当 n 为奇数时，x_3 为偶数，有 $\frac{n-1}{2}$ 种取法，于是

$$N=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\frac{n-1}{2}=\frac{(n-1)(n-3)}{2}$$

10.24　整点个数为以下方程非负整数解的个数 a_r

$$x+2y=r\qquad r=0,1,\cdots,n$$

设关于 $\{a_r\}$ 的生成函数为

$$A(z)=\frac{1}{(1-z)(1-z^2)}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+z}+\left(-\frac{z}{4}+\frac{3}{4}\right)\frac{1}{(1-z)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^rz^r-\frac{z}{4}\sum_{r=0}^{\infty}(1+r)z^r+\frac{3}{4}\sum_{r=0}^{\infty}(1+r)z^r$$

于是

$$a_r=\frac{r}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(-1)^r$$
$$N=\sum_{r=0}^{n}a_r=\sum_{r=0}^{n}\left[\frac{r}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(-1)^r\right]=\frac{1}{4}(n+1)(n+3)+\frac{1}{8}[1+(-1)^n]$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{4}(n+2)^2 & n\text{ 为偶数}\\ \frac{1}{4}(n+1)(n+3) & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

10.25　**方法1**　设 AB、BC、AC 三边的边长分别为 x_1、x_2、x_3，则

$$x_1+x_2+x_3=2n+1$$
$$x_1,x_2,x_3>0$$
$$x_1+x_2>x_3,\quad x_1+x_3>x_2,\quad x_2+x_3>x_1$$

以上条件等价于 $x_1,x_2,x_3<n+1$.

设 N_1 是所有可能的三角形个数，N_2 是一条边长超过 n 的三角形数. 考虑不加限制条件的所有正整数解的序列所对应的生成函数 $A(y)$，则

$$A(y)=(1+y+y^2+\cdots)^3=\frac{1}{(1-y)^3}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3-1}{k}y^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}y^k$$

展开式中 y^{2n+1} 的系数是 $N_1=(2n+3)(n+1)$.

如果一条边长超过 n，这种三角形数 N_2 相当于方程 $x_1+x_2+x_3=n$ 的非负整数解的个数，这个数是 $N_2=\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$. 由于三条边总长等于 $2n+1$，不可能两条边长同时超过 n，于是所求的三角形数

$$N=N_1-3N_2=(2n+3)(n+1)-\frac{3}{2}(n+2)(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)n$$

方法 2 根据题意写出生成函数如下

$$\begin{aligned}A(y)&=(1+y+y^2+\cdots+y^n)^3=\frac{(1-y^{n+1})^3}{(1-y)^3}\\&=(1-3y^{n+1}+3y^{2n+2}+y^{3n+3})\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}y^n\end{aligned}$$

上述展开式中 y^{2n+1} 项的系数为

$$N=\binom{2n+1+2}{2}-3\binom{n+2}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$$

10.26 **方法 1** 设所求的 k 位字符串的个数为 a_k，$\{a_k\}$ 的指数生成函数为

$$\begin{aligned}G_e(x)&=(e^x-1)^2e^{(n-2)x}=(e^{2x}-2e^x+1)e^{(n-2)x}\\&=e^{nx}-2e^{(n-1)x}+e^{(n-2)x}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}x^k-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-1)^k}{k!}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-2)^k}{k!}x^k\end{aligned}$$

x^k 的系数为

$$\frac{a_k}{k!}=\frac{1}{k!}[n^k-2(n-1)^k+(n-2)^k]$$

因此所求字符串的个数为 $a_k=n^k-2(n-1)^k+(n-2)^k$.

方法 2 设 S 表示 Σ 上的长为 k 的字符串的集合，构造子集

$$A=\{x\mid x\in S, x\text{ 不含 }a\},\quad B=\{x\mid x\in S, x\text{ 不含 }b\}$$

其中

$$|S|=n^k,\quad |A|=|B|=(n-1)^k,\quad |A\cap B|=(n-2)^k$$

根据包含排斥原理，所求的字符串的个数为

$$\begin{aligned}|\overline{A}\cap\overline{B}|&=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|\\&=n^k-2(n-1)^k+(n-2)^k\end{aligned}$$

10.27 根据给定条件列出递推方程如下：

$$\begin{cases}T(n)=T(n-1)+4n\\T(0)=1\end{cases}$$

根据迭代解得

$$T(n)=2n^2+2n+1$$

10.28 (1) $C(x)=(x+x^3+\cdots)^4=\dfrac{x^4}{(1-x^2)^4}$

(2) $C(x)=(1+x)(1+x+x^2+\cdots)^2=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

(3) $C(x)=(x^{10}+x^{11}+x^{12}+\cdots)^4=\dfrac{x^{40}}{(1-x)^4}$

10.29 (1) $G_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\dfrac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$

(2) $G_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n n!\dfrac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \dfrac{1}{1-2x}$

(3) $G_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n!} = e^{-x}$

10.30 指数生成函数为

$$\begin{aligned}
A_e(x) &= \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2\\
&= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2(e^x)^2 = \frac{e^{4x}}{4}+\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} 4^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$a_n=\begin{cases} 4^{n-1}+2^{n-1} & n\geqslant 1\\ 1 & n=0\end{cases}$$

10.31 列出指数生成函数如下:

$$\begin{aligned}
G_e(x) &= e^x(e^x-1)\left[\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\right]\\
&= (e^{2x}-e^x)\frac{1}{4}[(e^{2x}+2+e^{-2x})+(e^{2x}-2+e^{-2x})]\\
&= \frac{1}{2}(e^{2x}-e^x)(e^{2x}+e^{-2x}) = \frac{1}{2}(e^{4x}-e^{3x}+1-e^{-x})
\end{aligned}$$

解得

$$a_n=\begin{cases} 0 & n=0\\ \dfrac{4^n-3^n-(-1)^n}{2} & n>0\end{cases}$$

10.32 **方法1** 用指数生成函数

$$\begin{aligned}
G_e(x) &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 e^{4x}+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 e^{4x}\\
&= \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}e^{4x} = \frac{1}{2}e^{6x}+\frac{1}{2}e^{2x}
\end{aligned}$$

$$N = \frac{6^n+2^n}{2}$$

方法2 设序列数为 a_n,则

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1}+2(6^{n-1}-a_{n-1})\\ a_1 = 4\end{cases}$$

解得

$$a_n = (2^n + 6^n)/2$$

10.33　一个函数 $f: A \to B$ 是集合

$$\{\langle 1, y_1 \rangle, \langle 2, y_2 \rangle, \cdots, \langle 2n, y_{2n} \rangle\},$$

每个函数对应于序列 $\langle y_1, y_2, \cdots, y_{2n} \rangle$，其中函数值 $y_1, y_2, \cdots, y_{2n}$ 取自集合 $B=\{1,2,\cdots,5\}$，可以把 $\langle y_1, y_2, \cdots, y_{2n} \rangle$ 看作 B 的一个有序可重复的选择，并且每个元素 $1,2,\cdots,5$ 在其中都出现偶数次. 容易看出，每个元素出现的次数不超过 $2n$.

设选法数是 a_k，$\{a_k\}$ 的指数生成函数是：

$$\begin{aligned} G_e(x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^5 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5}(e^x + e - x)^5 \\ &= \frac{1}{2^5}(e^{5x} + 5e^{4x}e^{-x} + 10e^{3x}e^{-2x} + 10e^{2x}e^{-3x} + 5e^x e^{-4x} + e^{-5x}) \\ &= \frac{1}{2^5}(e^{5x} + 5e^{3x} + 10e^x + 10e^{-x} + 5e^{-3x} + e^{-5x}) \\ &= \frac{1}{2^5}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^k x^k}{k!} + 5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k x^k}{k!} + 10\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} + 10\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{k!}\right. \\ &\quad \left. + 5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-3)^k x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-5)^k x^k}{k!}\right] \end{aligned}$$

其 $x^k/k!$ 的系数是：

$$\frac{1}{2^5}[5^k + 5 \cdot 3^k + 10 \cdot 1 + 10 \cdot (-1)^k + 5 \cdot (-3)^k + (-5)^k]$$

当 $k=2n$ 时，

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2^5}[5^{2n} + 5 \cdot 3^{2n} + 10 + 10 \cdot (-1)^{2n} + 5 \cdot (-3)^{2n} + (-5)^{2n}] \\ &= \frac{1}{2^5}(2 \cdot 5^{2n} + 10 \cdot 3^{2n} + 20) \\ &= \frac{1}{2^4}(5^{2n} + 5 \cdot 3^{2n} + 10) \end{aligned}$$

例如，当 $n=1$ 时，通过 y_1 与 y_2 的选择构成的 $\langle y_1, y_2 \rangle$ 只有 5 种，即 $\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,5 \rangle$，而

$$a_2 = (5 \times 5 + 5 \times 9 + 10)/16 = 5$$

10.34　设组成 n 位数的个数为 a_n，则

$$\begin{aligned} A_e(x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^3 \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 (e^x)^3 = \frac{e^{5x}}{4} + \frac{1}{2}e^{3x} + \frac{1}{4}e^x \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} 5^n \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

使用指数生成函数，求得

$$a_n=\frac{1}{4}5^n+\frac{1}{2}3^n+\frac{1}{4}$$

10.35 等式右边对应了将 n 个不同的球放到 x 个不同的盒子且允许空盒的方法数，即 x^n. 将这些方法按照含有球的盒子个数进行分类，只放入 k 个盒子的方法数是

$$\binom{x}{k}k!\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}=P(x,k)\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\}x(x-1)\cdots(x-k+1)\qquad k=1,2,\cdots,n$$

因此总方法数需要对 k 求和，这就得到等式左边的公式.

10.36 **方法1** 把工作分配看作从5个工作的集合到4个雇员的集合的函数. 每个雇员至少得到1项工作的分配方案，对应于从工作集合到雇员集合的一个满射函数. 因此

$$4!\left\{\begin{matrix}5\\4\end{matrix}\right\}=240$$

因此存在240种方式来分配工作.

方法2 设所有的分配方案构成集合 S，雇员 i 没有得到工作的分配方案构成子集 A_i，$i=1,2,3,4$. 那么

$$\begin{aligned}&|S|=4^5\\&|A_i|=3^5 && i=1,2,3,4\\&|A_i\cap A_j|=2^5 && 1\leqslant i<j\leqslant 4\\&|A_i\cap A_j\cap A_k|=1^5 && 1\leqslant i<j<k\leqslant 4\\&|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0\end{aligned}$$

代入包含排斥原理，得到

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4|=4^5-4\times3^5+6\times2^5-4\times1^5+0=240$$

第 11 章 初等数论

11.1 内容提要

1. 素数

整除 $b \mid a$,因子,倍数,带余除法 $a=qb+r, 0 \leqslant r < |b|$,余数 $r=a \bmod b$.

大于 1 且只能被 1 和自身整除的数称作**素数**. 大于 1 的非素数称作**合数**.

算术基本定理 任何大于 1 的整数 a 有素因子分解

$$a=p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

其中,$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是不相同的素数,$r_1, r_2, \cdots, r_k$ 是正整数,并且在不计顺序的情况下,该表示是唯一的.

有无穷多个素数. 记 $\pi(n)$ 为小于等于 n 的素数个数.

素数定理 $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\pi(n)}{n/\ln n}=1$

埃拉托斯特尼(Eratosthene)筛法——求任意给定正整数以内所有素数的方法.

2. 最大公约数与最小公倍数

a 与 b 的公因子(公约数)与公倍数,最大公因子(最大公约数) $\gcd(a,b)$ 与最小公倍数 $\operatorname{lcm}(a,b)$. 如果 $\gcd(a,b)=1$,则称 a 和 b **互素**.

定理 11.1 (1) 若 $a \mid m, b \mid m$,则 $\operatorname{lcm}(a,b) \mid m$.

(2) 若 $d \mid a, d \mid b$,则 $d \mid \gcd(a,b)$.

(3) 设 $a=qb+r$,其中 a、b、q、r 都是整数,则 $\gcd(a,b)=\gcd(b,r)$.

(4) 设 a 和 b 不全为 0,则存在整数 x 和 y,使得 $\gcd(a,b)=xa+yb$.

(5) a 和 b 互素的充分必要条件是存在整数 x 和 y 使得 $xa+yb=1$.

设 $a=p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}, b=p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$,其中 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 是不同的素数,$r_1, r_2, \cdots, r_k, s_1, s_2, \cdots, s_k$ 是非负整数,则

$$\gcd(a,b)=p_1^{\min(r_1,s_1)} p_2^{\min(r_2,s_2)} \cdots p_k^{\min(r_k,s_k)}$$

$$\operatorname{lcm}(a,b)=p_1^{\max(r_1,s_1)} p_2^{\max(r_2,s_2)} \cdots p_k^{\max(r_k,s_k)}$$

辗转相除法(又称**欧几里得算法**)——求最大公约数的方法.

3. 同余

如果 $m \mid a-b$,则称 a 与 b **模 m 同余**,记作 $a \equiv b \pmod{m}$.

(1) 同余关系是等价关系,即同余关系具有自反性、传递性和对称性.

(2) 模算术运算 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$,则

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}, \quad ac \equiv bd \pmod{m}, \quad a^k \equiv b^k \pmod{m}$$

其中 k 是非负整数.

整数 a 在模 m 同余关系下的等价类称作 a 的**模 m 等价类**,记作$[a]_m$,简记作$[a]$. 整数集合 $\mathbf{Z}$ 在模 m 同余关系下的商集记作$\mathbf{Z}_m$. 在 $\mathbf{Z}_m$ 上定义加法和乘法如下:

$$[a]+[b]=[a+b], \quad [a]\cdot[b]=[ab]$$

4. 一次同余方程

定理 11.2 设 $m>0$,一次同余方程 $ax \equiv c \pmod{m}$ 有解的充分必要条件是 $\gcd(a,m) \mid c$.

设 x_0 是方程的一个解,则方程的解可写成 $x \equiv x_0 \pmod{m}$.

如果 $ab \equiv 1 \pmod{m}$,则称 b 是 a 的**模 m 逆**,记作 $\boldsymbol{a}^{-1} \pmod{\boldsymbol{m}}$或 $\boldsymbol{a}^{-1}$.

定理 11.3 (1) a 的模 m 逆存在的充分必要条件是 a 与 m 互素.

(2) 设 a 与 m 互素,则在模 m 下 a 的模 m 逆是唯一的,即 a 的任意两个模 m 逆都模 m 同余.

中国剩余定理(孙子定理) 设正整数 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 两两互素,则一次同余方程组

$$\begin{gathered} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{gathered}$$

有整数解,并且在模 $m=m_1m_2\cdots m_k$ 下解是唯一的,即任意两个解都是模 m 同余的.

令 $M_i=m/m_i$,设 M_i 的模 m_i 逆为 M_i^{-1},$i=1,2,\cdots,k$,则同余方程组的解为

$$x \equiv a_1M_1^{-1}M_1+a_2M_2^{-1}M_2+\cdots+a_kM_k^{-1}M_k \pmod{m}$$

设 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 是 k 个大于 1 的两两互素的正整数,x 的模表示 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$,其中 $x_i=x \bmod m_i$,$i=1,2,\cdots,k$. 利用整数的模表示可以做 $m=m_1m_2\cdots m_k$ 以内的加、减、乘运算.

5. 欧拉定理和费马小定理

欧拉函数 $\phi(n)$等于$\{0,1,\cdots,n-1\}$中与 n 互素的个数. 当 n 为素数时,$\phi(n)=n-1$.

欧拉定理 设 a 与 n 互素,则 $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

费马小定理 设 p 是素数,a 与 p 互素,则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
另一种形式,设 p 是素数,则对任意的整数 a, $a^p \equiv a \pmod{p}$.

11.2 习　题

11.1 判断下述各命题是否为真.

$3 \mid 7$, $5 \mid -35$, $-7 \mid -21$, $12 \mid 4$, $2 \mid 0$, $0 \mid 2$, $0 \mid 0$

11.2 给出 24 的全部因子.

11.3 对下述每一对数做带余除法,第一个数是被除数,第二个数是除数.

(1) 35,4 (2) 5,8 (3) 12,3 (4) -4,3 (5) -28,7 (6) -6,-4

11.4 设 a、b、c、d 均为正整数,下述各命题是否为真?若为真,请给出证明;否则,请给出反例.

(1) 若 $a \mid c, b \mid c$,则 $ab \mid c$;

(2) 若 $a \mid c, b \mid d$,则 $ab \mid cd$;

(3) 若 $ab \mid c$,则 $a \mid c$;

(4) 若 $a \mid bc$,则 $a \mid b$ 或 $a \mid c$.

11.5 给出下述正整数的素因子分解.

$$126,\ 256,\ 1092,\ 6325,\ 20!$$

11.6 判断下述正整数是素数,还是合数.

$$113,\ 221,\ 527,\ 2^{13}-1$$

11.7 设计用埃拉托斯特尼筛法求正整数 **N** 以内的所有素数的算法.

11.8 证明:对任意的整数 n,

(1) $6 \mid n(n+1)(n+2)$.

(2) $\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{3}n^3+\frac{7}{15}n$ 是整数.

11.9 证明:对任意的整数 $n>1, 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 不是整数.

11.10 (1) 设全体素数从小到大顺序排列为:$p_1=2, p_2=3, p_3, p_4, \cdots$. 试证明:

$$p_n \leqslant 2^{2^{n-1}} \quad n=1,2,\cdots$$

(2) 证明:$\pi(x)>\log_2\log_2 x, \quad x \geqslant 2$

11.11 如果整系数代数方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 有非零整数解 u,则 $u \mid a_n$.

11.12 下述方程是否有整数解?若有整数解,试求出所有的整数解.

(1) $x^2-x+1=0$

(2) $x^3+x^2-4x-4=0$

(3) $x^4+5x^3-2x^2+7x+2=0$

(4) $2x^4+5x^3+9x=0$

11.13 利用素因子分解,求下述每一对数的最大公约数和最小公倍数.

(1) 175,140 (2) 72,108 (3) 315,2200

11.14 求满足 $\gcd(a,b)=10$ 且 $\operatorname{lcm}(a,b)=100$ 的所有正整数对 a,b.

11.15 设 p 是素数,a 是整数,则当 $p \mid a$ 时,$\gcd(p,a)=p$;当 $p \nmid a$ 时,$\gcd(p,a)=1$.

11.16 对任意的整数 x、y、u、v,有 $\gcd(a,b) \leqslant \gcd(xa+yb, ua+vb)$.

11.17 用辗转相除法求下述每一对数的最大公约数.

(1) 85,125 (2) 231,72 (3) 45,56 (4) 154,64

11.18 下述每一对数 a,b 是否互素?若互素,试给出整数 x 和 y 使 $xa+yb=1$.

(1) 24,35 (2) 63,91 (3) 450,539 (4) 1024,729

11.19 求下述每一对数的最大公约数,其中 n 是整数,k 是正整数.

(1) $2n-1, 2n+1$ (2) $2n, 2(n+1)$ (3) $kn, k(n+2)$

11.20 设 a、b 是两个不为 0 的整数,d 为正整数,则 $d=\gcd(a,b)$ 当且仅当存在整数 x 和 y 使得 $a=dx, b=dy$,且 x 与 y 互素.

11.21 证明:对任意的正整数 a 和 b,$ab=\gcd(a,b)\cdot\operatorname{lcm}(a,b)$.

11.22　证明：如果 $a \mid bc$，且 a,b 互素，则 $a \mid c$.

11.23　设 a,b 互素，证明：

(1) 对任意的整数 m，$\gcd(m,ab)=\gcd(m,a)\gcd(m,b)$.

(2) 当 $d>0$ 时，$d \mid ab$ 当且仅当存在正整数 d_1、d_2，使 $d=d_1d_2$，$d_1 \mid a$，$d_2 \mid b$，并且 d 的这种表示是唯一的.

11.24　设 a,b 是整数，证明：$11 \mid a^2+5b^2$ 当且仅当 $11 \mid a$ 且 $11 \mid b$.

11.25　判断下述命题是否为真.

(1) $758 \equiv 246 \pmod{18}$　　(2) $365 \equiv -3 \pmod 7$

(3) $-29 \equiv 1 \pmod 5$　　(4) $352 \equiv 0 \pmod{11}$

11.26　给出使下述同余式成立且大于 1 的正整数 m：

(1) $35 \equiv 14 \pmod m$　　(2) $10 \equiv -1 \pmod m$

(3) $-7 \equiv 21 \pmod m$　　(4) $37^2 \equiv 30^2 \pmod m$

(5) $8 \equiv 2 \pmod m$ 且 $7 \equiv -2 \pmod m$

11.27　写出 $\mathbf{Z}_7$ 的全部元素以及 $\mathbf{Z}_7$ 上的加法表和乘法表.

11.28　写出 $\mathbf{Z}_6$ 的全部元素以及 $\mathbf{Z}_6$ 上的加法表和乘法表.

11.29　利用主教材例 11.8 中给出的计算公式，计算珍珠港日 1941 年 12 月 7 日是星期几.

11.30　验证 M 月 1 号的星期数与当年 3 月 1 日的星期数 w_Y 之差为 $\lfloor (13M-11)/5 \rfloor \pmod 7$. 从而得到 y 年 m 月 d 日星期数的另一个更简便一点的计算公式：

$$w \equiv 2-2C+X+\lfloor X/4 \rfloor+\lfloor C/4 \rfloor+\lfloor (13M-11)/5 \rfloor+d \pmod 7$$

其中，$M=(m-3) \bmod 12+1$，$Y=y-\lfloor M/11 \rfloor=100C+X$.

11.31　证明同余关系是等价关系，即同余关系具有

(1) 自反性：　$a \equiv a \pmod m$

(2) 传递性：　$a \equiv b \pmod m$，$b \equiv c \pmod m \Rightarrow a \equiv c \pmod m$

(3) 对称性：　$a \equiv b \pmod m \Rightarrow b \equiv a \pmod m$

11.32　模算术运算. 设 $a \equiv b \pmod m$，$c \equiv d \pmod m$，则

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod m,\quad ac \equiv bd \pmod m$$

11.33　证明：(1) 设 $d \geqslant 1$，$d \mid m$，则 $a \equiv b \pmod m \Rightarrow a \equiv b \pmod d$；

(2) 设 $d \geqslant 1$，则 $a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow da \equiv db \pmod{dm}$；

(3) 设 c 与 m 互素，则 $a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow ca \equiv cb \pmod m$.

11.34　下述命题是否为真？若为真，试证明之；若为假，试给出反例.

(1) 若 $a^2 \equiv b^2 \pmod m$，则 $a \equiv b \pmod m$ 或 $a \equiv -b \pmod m$；

(2) 若 $a \equiv b \pmod m$，则 $a^2 \equiv b^2 \pmod m$；

(3) 若 $a^2 \equiv b^2 \pmod{m^2}$，则 $a \equiv b \pmod m$；

(4) 若 $a \equiv b \pmod{mn}$，则 $a \equiv b \pmod m$ 且 $a \equiv b \pmod n$；

(5) 若 $a \equiv b \pmod m$ 且 $a \equiv b \pmod n$，则 $a \equiv b \pmod{mn}$.

11.35　下述一次同余方程是否有解？若有解，试给出它的全部解.

(1) $9x \equiv 3 \pmod 6$

(2) $4x \equiv 3 \pmod 6$

(3) $3x\equiv -1 \pmod 5$

(4) $8x\equiv 2 \pmod 4$

(5) $20x\equiv 12 \pmod 8$

11.36　对下述每一组 a、b、m，验证 b 是 a 的模 m 逆.

(1) 5,3,7　(2) 8,7,11　(3) 11,11,12　(4) 6,11,13

11.37　对下述每一对数 a 和 m，是否有 a 的模 m 逆？若有，试给出.

(1) 2,3　(2) 8,12　(3) 18,7　(4) 12,21　(5) -1,9

11.38　解下述一次同余方程组.

(1) $x\equiv 1 \pmod 3$

$x\equiv 2 \pmod 4$

$x\equiv 3 \pmod 5$

(2) $x\equiv 1 \pmod 3$

$x\equiv -1 \pmod 5$

$x\equiv -2 \pmod{11}$

(3) $3x\equiv 1 \pmod 5$

$4x\equiv 3 \pmod{11}$

11.39　把一次同余方程 $19x\equiv 559 \pmod{1155}$ 化成模较小的一次同余方程组并求解之.

11.40　某人每工作 8 天后休息 2 天. 一次他恰好是周六和周日休息. 问：这次之后他至少要多少天后才能恰好赶上周日休息？

11.41　求四个相邻整数，它们依次可被 4、9、25、49 整除.

11.42　给定模 $m_1=9$，$m_2=7$，$m_3=5$，设 $x=17$，$y=8$，

(1) 给出 x，y 的模表示.

(2) 计算 $x+y$，$x-y$ 和 xy 的模表示.

(3) 利用(2)的结果计算 $x+y$，$x-y$ 和 xy.

11.43　下述方程是否有整数解？若有，试给出所有的整数解.

(1) $3x+2y=6$

(2) $12x-9y=8$

11.44　设 $m>0$，$d=\gcd(a,m)$ 且 $d\mid c$，证明：一次同余方程 $ax\equiv c \pmod m$ 在模 m 下有 d 个解.

11.45　设 $m>1$，$ac\equiv bc \pmod m$，$d=\gcd(c,m)$，证明：$a\equiv b \pmod{m/d}$.

11.46　设 p 是素数，若 $x^2\equiv 1 \pmod p$，证明：$x\equiv 1 \pmod p$ 或 $x\equiv -1 \pmod p$.

11.47　设正整数 $m>n$. 证明：$2^n-1\mid 2^m-1$ 当且仅当 $n\mid m$.

11.48　设 m，n 是正整数，证明：$\gcd(2^m-1,2^n-1)=2^{\gcd(m,n)}-1$.

11.49　证明：所有的梅森数两两互素.

11.50　验证：$m_1=2^{32}-1$，$m_2=2^{31}-1$，$m_3=2^{29}-1$，$m_4=2^{27}-1$，$m_5=2^{25}-1$ 两两互素.

11.51　设 $F_n=2^{2^n}+1$，$n=0,1,2,\cdots$. 证明：对任意的 $n\neq m$，F_n 与 F_m 互素.

11.52　证明：存在无穷多个 n 使得 $\phi(n)>\phi(n+1)$.

11.53 证明欧拉函数具有下述性质.

(1) 若 m 和 n 互素,则 $\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)$.

(2) 设 p 为素数,k 为正整数,则 $\phi(p^k)=p^{k-1}(p-1)$.

(3) 设 $n>1$,它的素因子分解为 $n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_t^{r_t}$,则

$$\begin{aligned}\phi(n)&=p_1^{r_1-1}(p_1-1)p_2^{r_2-1}(p_2-1)\cdots p_t^{r_t-1}(p_t-1)\\&=n\prod_{i=1}^{t}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\end{aligned}$$

11.54 证明:当 $n\geqslant 3$ 时,$2\mid\phi(n)$.

11.55 设 $n>3$ 是素数,证明:小于 n 的正整数中除1和 $n-1$ 外可分成对,使得每一对中的两个数互为模 n 逆.

11.56 证明**威尔逊(Wilson)定理**:设 $n>1$,则 n 是素数当且仅当 $(n-1)!\equiv -1(\bmod n)$.

11.57 利用费马小定理计算下列各式.

(1) $2^{325}\bmod 5$ (2) $3^{516}\bmod 7$ (3) $8^{1003}\bmod 11$

11.58 设 m 与 n 互素,证明:$m^{\phi(n)}+n^{\phi(m)}\equiv 1(\bmod mn)$

11.59 设 $f(x)$是整系数多项式,p 是素数. 证明:$(f(x))^p\equiv f(x^p)(\bmod p)$

11.60 设 p 是素数,$p\nmid a$. 证明:对任意的正整数 k,$p^k\mid a^{p^{k-1}(p-1)}-1$.

11.3 习题解答与分析

11.1 假,真,真,假,真,假,假.

11.2 $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm12,\pm24$.

11.3 (1) $35=8\times4+3$. (2) $5=0\times8+5$. (3) $12=4\times3+0$.

(4) $-4=-2\times3+2$. (5) $-28=-4\times7+0$. (6) $-6=2\times(-4)+2$.

11.4 (1) 假. 反例:$4\mid12,6\mid12$,但 $4\times6\nmid12$.

(2) 真. 证明:由题设,存在整数 k_1、k_2,使得 $c=k_1a,d=k_2b$,从而有 $cd=k_1k_2ab$,得证 $ab\mid cd$.

(3) 真. 证明:存在整数 k,使得 $c=k(ab)=(kb)a$,得证 $a\mid c$.

(4) 假. 反例:$4\mid2\times6$,但 $4\nmid2,4\nmid6$.

11.5 $126=2\times3^2\times7$, $256=2^8$, $1092=2^2\times3\times7\times13$, $6325=5^2\times11\times23$,

$$\begin{aligned}20!&=2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)\times11\times(2^2\times3)\times13\\&\quad\times(2\times7)\times(3\times5)\times2^4\times17\times(2\times3^2)\times19\times(2^2\times5)\\&=2^{18}\times3^8\times5^4\times7^2\times11\times13\times17\times19\end{aligned}$$

11.6 **提示**:根据主教材中的定理11.4的推论,为了判断正整数 $n(n>1)$是素数还是合数,只需检查所有小于等于$\sqrt{n}$的素数是否整除 n.

解:$\sqrt{113}<11$,2,3,5,7都不能整除113,故113是素数.

$\sqrt{221}<15$,2,3,5,7,11不能整除221,但 $221=13\times17$,故221是合数.

$\sqrt{527}<23$,2,3,5,7,11,13不能整除527,但 $527=17\times31$,故527是合数.

$2^{13}-1=8191$，$\sqrt{8191}<91$，2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89 都不能整除 8191，故 8191 是素数.

11.7　Sieve(n，P).

输入：正整数 n.

输出：小于等于 n 的所有素数 P.

① if $n=1$ then $P\leftarrow\varnothing$，计算结束；

② $P\leftarrow\{2\}$；

③ $a\leftarrow 2$；

④ if $n=a$ then 计算结束；

⑤ $b\leftarrow\min\{a^2, n\}$；

⑥ $Q\leftarrow\{x \mid a<x\leqslant b\}$；

⑦ for P 中的每一个 x

⑧ 　　for Q 中的每一个 y

⑨ 　　　if $x*\lfloor y/x\rfloor=y$ then 从 Q 中删去 y；

⑩ $P\leftarrow P\cup Q$；

⑪ $a\leftarrow b$；

⑫ 转④.

11.8　(1) $6\mid n(n+1)(n+2)\Leftrightarrow 2\mid n(n+1)(n+2)\wedge 3\mid n(n+1)(n+2)$.

n 与 $n+1$ 中有一个被 2 整除，故 $2\mid n(n+1)(n+2)$.

再设 $n=3k+i$，$i=0,1,2$. 若 $i=0$，则 $3\mid n$；若 $i=1$，则 $3\mid n+2$；若 $i=2$，则 $3\mid n+1$. 总有 $3\mid n(n+1)(n+2)$. 证毕.

(2) 要证 $15\mid 3n^5+5n^3+7n$. 为此只需证 $3\mid 5n^3+7n$ 且 $5\mid 3n^5+7n$.

证 $3\mid 5n^3+7n$. 注意到 $5n^3+7n$ 是奇函数，只需证对非负整数 n 成立. 用归纳法.

当 $n=0$ 时，$3\mid 0$，结论成立.

假设当 $n=k(k\geqslant 0)$ 时结论成立，则

$$5(k+1)^3+7(k+1)=(5k^3+7k)+3(5k^2+5k+4)$$

由归纳假设，$3\mid 5k^3+7k$，故有 $3\mid 5(k+1)^3+7(k+1)$，即当 $n=k+1$ 时结论也成立.

类似可证 $5\mid 3n^5+7n$.

11.9　设 $n!=2^m h$，h 是奇数，又设 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$，$k\geqslant 1$.

假若 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{n!}\sum_{a=2}^{n}\frac{n!}{a}$ 是整数，则 $n!\left|\sum_{a=2}^{n}\frac{n!}{a}\right.$. 当然有 $2^m\left|\sum_{a=2}^{n}\frac{n!}{a}\right.$，更有 $2^{m-k+1}\left|\sum_{a=2}^{n}\frac{n!}{a}\right.$. 对所有的 $2\leqslant a\leqslant n$ 且 $a\neq 2^k$，$a=2^i s$，s 是奇数，$i<k$. 于是，$\frac{n!}{a}=2^{m-i}t$，t 是奇数，从而 $2^{m-k+1}\left|\frac{n!}{a}\right.$. 但是，对 $a=2^k$，$\frac{n!}{a}=2^{m-k}h$ 不能被 2^{m-k+1} 整除，矛盾，故 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 不是整数.

11.10　(1) 用归纳法. 当 $n=1$ 时，$p_1=2^{2^0}$，结论成立. 假设对 $n(n\geqslant 1)$ 结论成立. 由

主教材中定理11.2的证明和归纳假设,得

$$p_{n+1}\leqslant p_1p_2\cdots p_n+1\leqslant 2^{2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}}+1=2^{2^n-1}+1<2^{2^n}$$

得证,对 $n+1$ 结论也成立.

(2) 由(1) $\log_2\log_2 p_{n+1}\leqslant n$. 设 $\pi(x)=n$,则 $x<p_{n+1}$. 于是

$$n\geqslant\log_2\log_2 p_{n+1}>\log_2\log_2 x$$

11.11 设 $a_0u^n+a_1u^{n-1}+\cdots+a_{n-1}u+a_n=0$ 且 $u\neq 0$,由 $a_n=-u(a_0u^{n-1}+a_1u^{n-2}+\cdots+a_{n-1})$,即可得到 $u\mid a_n$.

11.12 **分析**:0是方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的解当且仅当 $a_n=0$. 当 $a_n\neq 0$ 时,由上题,只需检查 a_n 的因子是否是方程的解.

(1) $x^2-x+1=0$. 1有2个因子1和-1,经检查它们都不是方程的解,故方程无整数解.

(2) $x^3+x^2-4x-4=0$. -4的因子为$\pm1,\pm2,\pm4$,经检查,$-1,2,-2$是方程的解.

(3) $x^4+5x^3-2x^2+7x+2=0$. 2的因子为$\pm1,\pm2$,经检查它们都不是方程的解,故方程无整数解.

(4) $2x^4+5x^3+9x=0$. 0是方程的解. 再考虑方程 $2x^3+5x^2+9=0$,9的因子为±1, $\pm3,\pm9$,经检查,-3是解. 故原方程有整数解0和-3.

11.13 (1) $175=5^2\times 7, 140=2^2\times 5\times 7$.

$\gcd(175,140)=5\times 7=35$, $\mathrm{lcm}(175,140)=2^2\times 5^2\times 7=700$.

(2) $72=2^3\times 3^2, 108=2^2\times 3^3$.

$\gcd(72,108)=2^2\times 3^2=36$, $\mathrm{lcm}(72,108)=2^3\times 3^3=216$.

(3) $315=3^2\times 5\times 7$, $2200=2^3\times 5^2\times 11$.

$\gcd(315,2200)=5$, $\mathrm{lcm}(315,2200)=2^3\times 3^2\times 5^2\times 7\times 11=138\ 600$.

11.14 **解法1** $\gcd(a,b)=2\times 5, \mathrm{lcm}(a,b)=2^2\times 5^2$. 设 $a=2^{i_1}\times 5^{j_1}, b=2^{i_2}\times 5^{j_2}$,则有

$$\min(i_1,i_2)=1,\quad \max(i_1,i_2)=2,\quad \min(j_1,j_2)=1,\quad \max(j_1,j_2)=2.$$

有下述4种可能:

① $i_1=1,i_2=2,j_1=1,j_2=2,a=10,b=100$.

② $i_1=1,i_2=2,j_1=2,j_2=1,a=50,b=20$.

③ $i_1=2,i_2=1,j_1=1,j_2=2,a=20,b=50$.

④ $i_1=2,i_2=1,j_1=2,j_2=1,a=100,b=10$.

解法2 可以证明(见题11.20和题11.21):设 $d=\gcd(a,b), m=\mathrm{lcm}(a,b)$,则 $a=da_1,b=db_1,m=da_1b_1$,其中 a_1 与 b_1 互素.

本题 $a=10a_1,b=10b_1,100=10a_1b_1$,即 $a_1b_1=10$,且 a_1 与 b_1,互素.

有下述4种可能:

① $a_1=1,b_1=10,a=10,b=100$.

② $a_1=10,b_1=1,a=100,b=10$.

③ $a_1=2,b_1=5,a=20,b=50$.

④ $a_1=5, b_1=2, a=50, b=20$.

11.15　当 $p \mid a$ 时，结论显然成立. 当 $p \nmid a$ 时，记 $d=\gcd(p,a)$，$d \mid p$，根据素数的定义，$d=1$ 或 $d=p$，而 $p \nmid a$，故 $d=1$.

11.16　记 $d=\gcd(a,b)$，有 $d \mid a$ 且 $d \mid b$. 由性质 11.1.1(见主教材 286 页)，$d \mid xa+yb$ 且 $d \mid ua+vb$，即 d 是 $xa+yb$ 和 $ua+vb$ 的公因子，故必有 $d \leqslant \gcd(xa+yb, ua+vb)$.

11.17　(1) $125=85+40$，$85=2\times 40+5$，$40=8\times 5$，$\gcd(125,85)=5$.

(2) $231=3\times 72+15$，$72=4\times 15+12$，$15=1\times 12+3$，$12=4\times 3$，$\gcd(231,72)=3$.

(3) $56=1\times 45+11$，$45=4\times 11+1$，$11=11\times 1$，$\gcd(45,56)=1$.

(4) $154=2\times 64+26$，$64=2\times 26+12$，$26=2\times 12+2$，$12=6\times 2$，$\gcd(154,64)=2$.

11.18　用辗转相除法.

(1) $35=1\times 24+11$，$24=2\times 11+2$，$11=5\times 2+1$，$\gcd(24,35)=1$，故 35 与 24 互素.

$$\begin{aligned}1 &= 11-5\times 2=11-5\times(24-2\times 11)=-5\times 24+11\times 11\\ &= -5\times 24+11\times(35-24)\end{aligned}$$

得　$-16\times 24+11\times 35=1$.

(2) $91=63+28$，$63=2\times 28+7$，$28=4\times 7$，$\gcd(63,91)=7$，故 63 与 91 不互素.

(3) $539=450+89$，$450=5\times 89+5$，$89=17\times 5+4$，$5=4+1$，450 与 539 互素.

$$\begin{aligned}1 &= 5-4=5-(89-17\times 5)=18\times 5-89=18\times(450-5\times 89)-89\\ &= 18\times 450-91\times 89=18\times 450-91\times(539-450)\end{aligned}$$

得　$109\times 450-91\times 539=1$.

(4) $1024=729+295$，$729=2\times 295+139$，$295=2\times 139+17$，$139=8\times 17+3$，$17=5\times 3+2$，$3=2+1$，1024 与 729 互素.

$$\begin{aligned}1 &= 3-2=3-(17-5\times 3)=6\times 3-17=6\times(139-8\times 17)-17\\ &= 6\times 139-49\times 17=6\times 139-49\times(295-2\times 139)\\ &= 104\times 139-49\times 295=104\times(729-2\times 295)-49\times 295\\ &= 104\times 729-257\times 295=104\times 729-257\times(1024-729)\end{aligned}$$

得　$-257\times 1024+361\times 729=1$.

11.19　(1) $2n+1=(2n-1)+2$，$\gcd(2n+1,2n-1)=\gcd(2n-1,2)=1$.

(2) 由 $\gcd(n,n+1)=1$，得 $\gcd(2n,2(n+1))=2$.

(3) $\gcd(n,n+2)=\gcd(n,2)=\begin{cases}1 & n\text{ 为奇数}\\ 2 & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

得

$$\gcd(kn,k(n+2))=\begin{cases}k & n\text{ 为奇数}\\ 2k & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

11.20　必要性：设 $a=dx$，$b=dy$. 根据主教材中的定理 11.7，存在整数 u、v 使得 $ua+vb=d$，即 $udx+vdy=d$. 因为 $d>0$，可消去 d 得 $ux+vy=1$. 由定理 11.7，得证 x 与 y 互素.

充分性：记 $d'=\gcd(a,b)$，因为 d 是 a 和 b 的公因子，故有 $d \mid d'$. 设 $d'=kd$，有

$kd \mid dx$ 且 $kd \mid dy$，得 $k \mid x$ 且 $k \mid y$. 而 x 与 y 互素，必有 $k=1$，得证 $d=\gcd(a,b)$.

11.21 记 $d=\gcd(a,b)$，由上题，$a=dx$，$b=dy$，x 与 y 互素. 于是，$\mathrm{lcm}(a,b)=\mathrm{lcm}(dx,dy)=d\cdot\mathrm{lcm}(x,y)=dxy$，得证 $\gcd(a,b)\cdot\mathrm{lcm}(a,b)=d\cdot dxy=ab$.

11.22 设 $bc=ka$，由 a,b 互素，根据主教材中的定理 11.8，存在整数 x,y 使得 $xa+yb=1$. 于是，$c=xac+ybc=xac+yka=(xc+yk)a$，得证 $a \mid c$.

11.23 (1) 设 $d_1=\gcd(m,a)$，$d_2=\gcd(m,b)$. 因为 a 与 b 互素，d_1 与 d_2 也互素. 又设 $m=d_1m_1$，根据上题，由 $d_2 \mid d_1m_1$ 且 d_1 与 d_2 也互素，推得 $d_2 \mid m_1$，从而 $d_1d_2 \mid m$，故 d_1d_2 是 m 和 ab 的公因子.

设 $d=\gcd(m,ab)$，$d=kd_1d_2$，$k\geqslant 1$. 由 $d_2 \mid b$ 和 a 与 b 互素，d_2 也与 a 互素，从而由 $kd_1d_2 \mid ab$，可推得 $kd_1 \mid a$. 于是，kd_1 是 m 和 a 的公因子，故 $k=1$. 得证 $d=d_1d_2$.

(2) 充分性显然.

必要性：设 $d \mid ab$，取 $d_1=\gcd(d,a)$，$d_2=\gcd(d,b)$，自然有 $d_1 \mid a$，$d_2 \mid b$. 由 $d \mid ab$，有 $\gcd(d,ab)=d$. 根据(1)，$d=\gcd(d,a)\gcd(d,b)=d_1d_2$.

下面证明唯一性. 设正整数 c_1、c_2，使得 $d=c_1c_2$ 且 $c_1 \mid a$，$c_2 \mid b$，由于 c_1 是 d 和 a 的公因子，必有 $c_1\leqslant d_1$. 同理，$c_2\leqslant d_2$. 得 $d=c_1c_2\leqslant d_1d_2=d$，得证 $c_1=d_1$，$c_2=d_2$.

11.24 充分性显然.

必要性：$0^2\equiv 0 \pmod{11}$，$1^2\equiv 10^2\equiv 1 \pmod{11}$，$2^2\equiv 9^2\equiv 4 \pmod{11}$，$3^2\equiv 8^2\equiv 9 \pmod{11}$，$4^2\equiv 7^2\equiv 5 \pmod{11}$，$5^2\equiv 6^2\equiv 3 \pmod{11}$，从而

$$a^2\equiv 0,1,3,4,5,9 \pmod{11},\ 5b^2\equiv 0,5,4,9,3,1 \pmod{11}$$

不难验证：只有当 $a^2\equiv 5b^2\equiv 0 \pmod{11}$ 时，有 $a^2+5b^2\equiv 0 \pmod{11}$. 得证 $a\equiv b\equiv 0 \pmod{11}$.

11.25 (1) 假. (2) 假. (3) 真. (4) 真.

11.26 (1) $35\equiv 14 \pmod m$，$m \mid 35-14$，即 $m \mid 21$，故 $m=3,7,21$.

(2) $10\equiv -1 \pmod m$，$m \mid 10+1$，即 $m \mid 11$，故 $m=11$.

(3) $-7\equiv 21 \pmod m$，$m \mid -7-21$，即 $m \mid -28$，故 $m=2,4,7,14,28$.

(4) $37^2\equiv 30^2 \pmod m$，$m \mid 37^2-30^2$，即 $m \mid 67\times 7$，故 $m=7,67,469$.

(5) $8\equiv 2 \pmod m$ 且 $7\equiv -2 \pmod m$，$m \mid 6$ 且 $m \mid 9$，6 和 9 大于 1 的公因子为 3，故 $m=3$.

11.27

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[6]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[6]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[6]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[6]	[6]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]

×	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[2]	[0]	[2]	[4]	[6]	[1]	[3]	[5]
[3]	[0]	[3]	[6]	[2]	[5]	[1]	[4]
[4]	[0]	[4]	[1]	[5]	[2]	[6]	[3]
[5]	[0]	[5]	[3]	[1]	[6]	[4]	[2]
[6]	[0]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

11.28

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

×	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[2]	[0]	[2]	[4]	[0]	[2]	[4]
[3]	[0]	[3]	[0]	[3]	[0]	[3]
[4]	[0]	[4]	[2]	[0]	[4]	[2]
[5]	[0]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

11.29 $Y=1941, C=19, X=41, M=10, d=7$.

$$w\equiv 41+\lfloor 41/4\rfloor+\lfloor 19/4\rfloor-2\times 19+2\times 10+\lfloor(10+\lfloor 10/7\rfloor)/2\rfloor+\lfloor 10/12\rfloor+7$$
$$\equiv 41+10+4-38+20+5+0+7\equiv 0 \pmod 7)$$

珍珠港日是星期日.

11.30 由 30 mod 7=2,星期数每个月加 2,大月再多加 1.

m	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
应加的星期数	0	3	5	8	10	13	16	18	21	23	26	29
$\lfloor(13M-11)/5\rfloor$	0	3	5	8	10	13	16	18	21	23	26	29

11.31 (1) 自反性. 因为 $m \mid a-a$,故 $a\equiv a \pmod m$.

(2) 传递性. 设 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$,$b\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$,有 $m\mid a-b$,$m\mid b-c$. 而 $a-c=(a-b)+(b-c)$,故 $m\mid a-c$. 得证 $a\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$.

(3) 对称性. 设 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$,有 $m\mid a-b$,自然又有 $m\mid b-a$,故 $b\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$.

11.32 设 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$,$c\equiv d(\mathrm{mod}\ m)$,有 $m\mid a-b$,$m\mid c-d$. 而$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$,故 $m\mid (a+c)-(b+d)$. 得证 $a+c\equiv b+d(\mathrm{mod}\ m)$. 类似可证 $a-c\equiv b-d(\mathrm{mod}\ m)$.

由 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$,$c\equiv d(\mathrm{mod}\ m)$,存在整数 x、y,使得 $a=xm+b$,$c=ym+d$. 于是,$ac=(xym+xd+yb)m+bd$,故有 $ac\equiv bd(\mathrm{mod}\ m)$.

11.33 (1) 设 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$,有 $m\mid a-b$. 又已知 $d\mid m$,由性质 11.1.2(见主教材 286 页),得 $d\mid a-b$. 故有 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ d)$.

(2) 因为 $d\neq 0$,根据性质 11.1.3(见主教材 287 页),$m\mid a-b\Leftrightarrow dm\mid d(a-b)$,从而 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\Leftrightarrow da\equiv db(\mathrm{mod}\ dm)$.

(3) 由 $m\mid a-b\Rightarrow m\mid ca-cb$,有 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)\Rightarrow ca\equiv cb(\mathrm{mod}\ m)$.

反之,设 $ca\equiv cb(\mathrm{mod}\ m)$,有 $m\mid ca-cb$. 已知 c 与 m 互素,由题 11.22,必有 $m\mid a-b$,得证 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$.

11.34 (1) 假. 反例:$4^2\equiv 2^2(\mathrm{mod}\ 4)$,但 $4\not\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$,$4\not\equiv -2(\mathrm{mod}\ 4)$.

分析:$a^2\equiv b^2(\mathrm{mod}\ m)\Leftrightarrow m\mid a^2-b^2\Leftrightarrow m\mid (a+b)(a-b)$,不一定有 $m\mid a-b$ 或 $m\mid a+b$.

(2) 真. 由模乘运算(题 11.32)立即可得.

(3) 假. 反例:$5^2\equiv 3^2(\mathrm{mod}\ 4^2)$,但 $5\not\equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$.

(4) 真. 由上题(1)立即可得.

(5) 假. 反例:$12\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$,$12\equiv 0(\mathrm{mod}\ 6)$,但 $12\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4\times 6)$.

11.35 **提示**:$ax\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$有解的充分必要条件是 $\gcd(a,m)\mid c$. 设 x_0 是方程的解,则所有与 x_0 模 m 同余的数都是方程的解,从而只需对模 m 的每一个等价类取一个代表,验证是否使方程成立,就能找到方程的所有解.

(1) $9x\equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$. $\gcd(9,6)=3$,$3\mid 3$,方程有解.

检查 $0,\pm1,\pm2,3$ 是否是方程的解,得 $x\equiv\pm1,3\equiv 1,3,5(\mathrm{mod}\ 6)$.

(2) $4x\equiv 3(\mathrm{mod}\ 6)$. $\gcd(4,6)=2$,$2\nmid 3$,方程无解.

(3) $3x\equiv -1(\mathrm{mod}\ 5)$. $\gcd(3,5)=1$,$1\mid -1$,方程有解.

检查 $0,\pm1,\pm2$ 是否是方程的解,得 $x\equiv -2\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)$.

(4) $8x\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$. $\gcd(8,4)=4$,$4\nmid 2$,方程无解.

(5) $20x\equiv 12(\mathrm{mod}\ 8)$. $\gcd(20,8)=4$,$4\mid 12$,方程有解.

检查 $0,\pm1,\pm2,\pm3,4$ 是否是方程的解,得 $x\equiv\pm1,\pm3\equiv 1,3,5,7(\mathrm{mod}\ 8)$.

11.36 (1) $5\times 3-1=14$,$7\mid 14$,故 $5\times 3\equiv 1(\mathrm{mod}\ 7)$,得 $5^{-1}\equiv 3(\mathrm{mod}\ 7)$.

(2) $8\times 7-1=55$,$11\mid 55$,故 $8\times 7\equiv 1(\mathrm{mod}\ 11)$,得 $8^{-1}\equiv 7(\mathrm{mod}\ 7)$.

(3) $11\times 11-1=120$,$12\mid 120$,故 $11\times 11\equiv 1(\mathrm{mod}\ 12)$,得 $11^{-1}\equiv 11(\mathrm{mod}\ 12)$.

(4) $6\times 11-1=65$,$13\mid 65$,故 $6\times 11\equiv 1(\mathrm{mod}\ 13)$,得 $6^{-1}\equiv 11(\mathrm{mod}\ 13)$.

11.37 **提示**:a 的模 m 逆存在当且仅当 a 与 m 互素. 当 a 与 m 互素时,求 a^{-1} 的一般做法是,先用辗转相除法,再通过回代求得整数 x 和 y,使得 $xa+ym=1$,则 $a^{-1}\equiv$

$x(\mathrm{mod}\ m)$. 当数值比较小时可通过观察直接求得.

(1) 2 与 3 互素,故 2 的模 3 逆存在.

由 $2\times2\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$,得 $2^{-1}\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)$.

(2) 8 与 12 不互素,故 8 的模 12 逆不存在.

(3) 18 与 7 互素,故 18 的模 7 逆存在.

解法 1 用辗转相除法 $18=2\times7+4,7=4+3,4=3+1$.

回代 $1=4-3=4-(7-4)=-7+2\times4=-7+2\times(18-2\times7)=2\times18-5\times7$,得 $18^{-1}\equiv2(\mathrm{mod}7)$.

解法 2 $18\equiv4(\mathrm{mod}\ 7),2\times4\equiv1(\mathrm{mod}\ 7)$,得 $18^{-1}\equiv2(\mathrm{mod}\ 7)$.

(4) 12 与 21 不互素,故 12 的模 21 逆不存在.

(5) -1 与 9 互素,故-1 的模 9 逆存在.

由$(-1)^2\equiv1(\mathrm{mod}\ 9)$,得$(-1)^{-1}\equiv-1\equiv8(\mathrm{mod}\ 9)$.

11.38 **提示**:中国剩余定理的证明(见主教材中定理 11.11 证明)是构造性的,给出了一次同余方程组的求解方法. 设 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 两两互素,一次同余方程组

$$
\begin{gathered}
x\equiv a_1(\mathrm{mod}\ m_1)\\
x\equiv a_2(\mathrm{mod}\ m_2)\\
\vdots\\
x\equiv a_k(\mathrm{mod}\ m_k)
\end{gathered}
$$

的求解步骤如下:

① 计算 $m=m_1m_2\cdots m_k$;

② 计算 $M_i=m/m_i$ 及 M_i 的模 m_i 逆 $M_i^{-1},i=1,2,\cdots,k$;

③ 方程组的解为 $x\equiv a_1M_1^{-1}M_1+a_2M_2^{-1}M_2+\cdots+a_kM_k^{-1}M_k(\mathrm{mod}\ m)$.

(1) $m_1=3,m_2=4,m_3=5$ 两两互素,$m=3\times4\times5=60$.

$$
\begin{aligned}
&M_1=4\times5=20,\quad M_1\equiv2(\mathrm{mod}\ 3),\quad M_1^{-1}=2\\
&M_2=3\times5=15,\quad M_2\equiv3(\mathrm{mod}\ 4),\quad M_2^{-1}=3\\
&M_3=3\times4=12,\quad M_3\equiv2(\mathrm{mod}\ 5),\quad M_3^{-1}=3
\end{aligned}
$$

得 $x\equiv1\times20\times2+2\times15\times3+3\times12\times3\equiv-2(\mathrm{mod}\ 60)$.

(2) $m_1=3,m_2=5,m_3=7,m_4=11$ 两两互素,$m=3\times5\times7\times11=1155$.

$$
\begin{aligned}
&M_1=5\times7\times11=385,M_1\equiv(-1)\times1\times(-1)\equiv1(\mathrm{mod}\ 3),M_1^{-1}=1\\
&M_2=3\times7\times11=231,M_2\equiv(-2)\times2\times1\equiv-4\equiv1(\mathrm{mod}\ 5),\ M_2^{-1}=1\\
&M_3=3\times5\times11=165,M_3\equiv3\times(-2)\times(-3)\equiv4(\mathrm{mod}\ 7),\ M_3^{-1}=2\\
&M_4=3\times5\times7=105,M_4\equiv6(\mathrm{mod}\ 11),\ M_4^{-1}=2
\end{aligned}
$$

得 $x\equiv1\times385\times1-1\times231\times1+2\times165\times2-2\times105\times2\equiv394(\mathrm{mod}\ 1155)$.

(3) 先将方程组化成中国剩余定理中的标准形式. $3^{-1}\equiv2(\mathrm{mod}\ 5),4^{-1}\equiv3(\mathrm{mod}\ 11)$,方程两边分别乘以这 2 个数,得

$$
\begin{gathered}
x\equiv2(\mathrm{mod}\ 5)\\
x\equiv9(\mathrm{mod}\ 11)
\end{gathered}
$$

$m_1=5,m_2=11$ 互素,$m=5\times11=55$. $M_1=11,M_1\equiv1(\mathrm{mod}\ 5),M_1^{-1}=1;M_2=5$, $M_2^{-1}=9$. 得

$$x \equiv 2\times 11\times 1+9\times 5\times 9\equiv 42 \pmod{55}$$

11.39　$1155=3\times 5\times 7\times 11$. 因为 3,5,7,11 两两互素,故 $19x\equiv 559 \pmod{1155}$ 等价于下述方程组

$$\begin{cases}19x\equiv 559 \pmod 3\\19x\equiv 559 \pmod 5\\19x\equiv 559 \pmod 7\\19x\equiv 559 \pmod{11}\end{cases}$$

化简,得

$$\begin{cases}x\equiv 1 \pmod 3\\-x\equiv -1 \pmod 5\\-2x\equiv -1 \pmod 7\\-3x\equiv -2 \pmod{11}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\equiv 1 \pmod 3\\x\equiv 1 \pmod 5\\2x\equiv 1 \pmod 7\\3x\equiv 2 \pmod{11}\end{cases}$$

而 $2^{-1}\equiv 4 \pmod 7$,$3^{-1}\equiv 4 \pmod{11}$,故方程组又等价于

$$\begin{cases}x\equiv 1 \pmod 3\\x\equiv 1 \pmod 5\\x\equiv 4 \pmod 7\\x\equiv 8\equiv -3 \pmod{11}\end{cases}$$

在上题(2)中已求得 $M_1=385$,$M_1^{-1}=1$,$M_2=231$,$M_2^{-1}=1$,$M_3=165$,$M_3^{-1}=2$,$M_4=105$,$M_4^{-1}=2$. 于是,得

$$x\equiv 1\times 385\times 1+1\times 231\times 1+4\times 165\times 2-3\times 105\times 2\equiv 151 \pmod{1155}$$

11.40　设至少 x 天后. 10 天一个周期,最后两天休息,可表示成 $x+1\equiv 9 \pmod{10}$ 或 $x+1\equiv 0 \pmod{10}$. 恰好是周日可表示成 $x+1\equiv 0 \pmod 7$. 于是有

$$\begin{cases}x\equiv 8 \pmod{10}\\x\equiv -1 \pmod 7\end{cases} \tag{1}$$

或

$$\begin{cases}x\equiv -1 \pmod{10}\\x\equiv -1 \pmod 7\end{cases} \tag{2}$$

$m_1=10$,$m_2=7$,$m=70$,$M_1=7$,$M_1^{-1}=3$,$M_2=10$,$M_2\equiv 3 \pmod 7$,$M_2^{-1}=5$. 方程组(1)的解为

$$x_1\equiv 8\times 7\times 3-1\times 10\times 5\equiv 48 \pmod{70}$$

方程组(2)的解为

$$x_2\equiv -1\times 7\times 3-1\times 10\times 5\equiv -1\equiv 69 \pmod{70}$$

故至少要在 48 天后(即周日休息后的第 49 天)恰好能在周日休息.

11.41 设第1个数为x,有

$$\begin{cases}x\equiv 0 \pmod 4\\ x+1\equiv 0 \pmod 9\\ x+2\equiv 0 \pmod{25}\\ x+3\equiv 0 \pmod{49}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\equiv 0 \pmod 4\\ x\equiv -1 \pmod 9\\ x\equiv -2 \pmod{25}\\ x\equiv -3 \pmod{49}\end{cases}$$

$$m_1=4,\quad m_2=9,\quad m_3=25,\quad m_4=49,\quad m=4\times 9\times 25\times 49=44\,100$$

$$M_1=9\times 25\times 49=11\,025,\quad M_1\equiv 1\times 1\times 1\equiv 1 \pmod 4,\quad M_1^{-1}=1$$

$$M_2=4\times 25\times 49=4900,\quad M_2\equiv 4\times(-2)\times 4\equiv 4 \pmod 9,\quad M_2^{-1}=7$$

$$M_3=4\times 9\times 49=1764,\quad M_3\equiv 4\times 9\times(-1)\equiv -11 \pmod{25},\quad M_3^{-1}=9$$

$$M_4=4\times 9\times 25=900,\quad M_4\equiv 18 \pmod{49},\quad M_4^{-1}=-19$$

解得 $x\equiv 0\times 11\,025\times 1-1\times 4900\times 7-2\times 1764\times 9-3\times 900\times(-19)$

$\equiv -14\,752 \pmod{44\,100}\equiv 29\,348 \pmod{44\,100}$

4个相邻的整数为 $29\,348+44\,100k$,$29\,349+44\,100k$,$29\,350+44\,100k$,$29\,351+44\,100k$,其中 $k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

11.42 (1) $x=(8,3,2)$,$y=(8,1,3)$.

(2) $x+y=(7,4,0)$,$x-y=(0,2,4)$,$xy=(1,3,1)$.

(3) 分别解下述一次同余方程组:

$$\begin{cases}z_1\equiv 7 \pmod 9\\ z_1\equiv 4 \pmod 7\\ z_1\equiv 0 \pmod 5\end{cases}\qquad \begin{cases}z_2\equiv 0 \pmod 9\\ z_2\equiv 2 \pmod 7\\ z_2\equiv 4 \pmod 5\end{cases}\qquad \begin{cases}z_3\equiv 1 \pmod 9\\ z_3\equiv 3 \pmod 7\\ z_3\equiv 1 \pmod 5\end{cases}$$

$m_1=9$,$m_2=7$,$m_3=5$,$m=9\times 7\times 5=315$,$M_1=7\times 5=35$,$M_1\equiv -1 \pmod 9$,$M_1^{-1}=-1$,$M_2=9\times 5=45$,$M_2\equiv 3 \pmod 7$,$M_2^{-1}=-2$,$M_3=9\times 7=63$,$M_3\equiv 3 \pmod 5$,$M_3^{-1}=2$. 解得

$$z_1\equiv 7\times 35\times(-1)+4\times 45\times(-2)+0\times 63\times 2\equiv 25 \pmod{315}$$

$$z_2\equiv 0\times 35\times(-1)+2\times 45\times(-2)+4\times 63\times 2\equiv 9 \pmod{315}$$

$$z_3\equiv 1\times 35\times(-1)+3\times 45\times(-2)+1\times 63\times 2\equiv 136 \pmod{315}$$

得 $x+y=25$, $x-y=9$, $xy=136$.

11.43 (1) $3x+2y=6$.

考虑一次同余方程 $3x\equiv 6 \pmod 2$,即 $x\equiv 0 \pmod 2$. 它的解为 $x=2k$,其中 k 是任意整数. 代入原方程 $6k+2y=6$,得 $y=3-3k$. 故方程的解为 $x=2k$,$y=3-3k$,其中 k 是任意整数.

(2) $12x-9y=8$.

方法1 如果方程有解,则解必满足 $12x\equiv 8 \pmod 9$. 而 $\gcd(12,9)=3$,$3\nmid 8$,$12x\equiv 8 \pmod 9$无解,故原方程无解.

方法 2 如果方程有解,则等式左边 $12x-9y$ 能被 3 整除,而等式右边 8 不能被 3 整除,矛盾,故原方程无解.

11.44 设 $a=da_1, m=dm_1$,其中设 a_1, m_1 互素. 根据主教材中定理 11.8,存在 x_0 使 $ax_0\equiv c(\bmod m)$. 又设 x 是方程的解,即 $ax\equiv c(\bmod m)$. 于是,$a(x-x_0)\equiv 0(\bmod m)$. 它等价于 $a_1(x-x_0)\equiv 0(\bmod m_1)$. 而 a_1 与 m_1 互素,故有 $x-x_0\equiv 0(\bmod m_1)$. 因此,方程在模 m 下恰好有 d 个解 $x\equiv x_0+km_1(\bmod m), k=0,1,\cdots,d-1$.

11.45 记 $c=dc_1, m=dm_1$,其中 c_1, m_1 互素. 由 $ac\equiv bc(\bmod m)$,有 $m\mid ac-bc$,即 $dm_1\mid d(a-b)c_1$,从而有 $m_1\mid(a-b)c_1$. 又 c_1, m_1 互素,故 $m_1\mid a-b$,得证 $a\equiv b(\bmod m_1)$,即 $a\equiv b(\bmod m/d)$.

11.46 由 $x^2\equiv 1(\bmod p)$,有 $p\mid x^2-1$,即 $p\mid(x-1)(x+1)$. 而 p 是素数,故有 $p\mid x-1$ 或 $p\mid x+1$. 得证 $x\equiv 1(\bmod p)$ 或 $x\equiv -1(\bmod p)$.

11.47 **方法 1** 充分性. 如果 $n\mid m$,设 $m=kn$,k 是大于 1 的整数,于是

$$2^m-1=2^{kn}-1=(2^n-1)(2^{(k-1)n}+2^{(k-2)n}+\cdots+1)$$

得证 $2^n-1\mid 2^m-1$.

必要性. 如果 $2^n-1\mid 2^m-1$,设 $2^m-1=(2^n-1)(a_0 2^{m-n}+a_1 2^{m-n-1}+\cdots+a_{m-n})$,其中 $a_i=0$ 或 $1, 0\leqslant i\leqslant m-n$. 将等式的右边展开,比较两边得

$$\begin{array}{ll} a_0=1 & a_1=\cdots=a_{n-1}=0 \\ a_k-a_{k-n}=0 & n\leqslant k\leqslant m-n \\ a_{m-2n+1}=\cdots=a_{m-n-1}=0 & a_{m-n}=1 \end{array}$$

除 a_{m-n} 外的 $m-n$ 个系数 $a_0,\cdots,a_{m-n-1}$ 可分成若干组,每组 n 个,第一个为 1,其余 $n-1$ 个为 0,故必有 $n\mid m$.

方法 2 采用二进制表示,$2^n-1=(\underbrace{1\cdots1}_{n个})_2$,$2^m-1=(\underbrace{1\cdots1}_{m个})_2$. 根据二进制除法,$(\underbrace{1\cdots1}_{n个})_2\mid(\underbrace{1\cdots1}_{m个})_2$ 当且仅当 $n\mid m$.

11.48 记 $d=\gcd(m,n), m=dm_1, n=dn_1$,其中 m_1、n_1 互素.

$$2^m-1=(2^d-1)(2^{d(m_1-1)}+2^{d(m_1-2)}+\cdots+2^d+1)$$
$$2^n-1=(2^d-1)(2^{d(n_1-1)}+2^{d(n_1-2)}+\cdots+2^d+1)$$

记 $A_0=2^{d(m_1-1)}+2^{d(m_1-2)}+\cdots+2^d+1$, $A_1=2^{d(n_1-1)}+2^{d(n_1-2)}+\cdots+2^d+1$.

要证 A_0 与 A_1 互素.

方法 1 由于 m_1、n_1 互素,可设

$$\begin{array}{ll} m_1=k_1n_1+n_2 & 1<n_2<n_1 \\ n_1=k_2n_2+n_3 & 1<n_3<n_2 \\ \vdots & \\ n_{t-1}=k_tn_t+1 & \end{array}$$

于是

$$A_0=A_1(2^{d(m_1-n_1)}+2^{d(m_1-2n_1)}+\cdots+2^{d(m_1-k_1n_1)})+A_2$$
$$A_2=2^{d(n_2-1)}+2^{d(n_2-2)}+\cdots+2^d+1$$
$$A_1=A_2(2^{d(n_1-n_2)}+2^{d(n_1-2n_2)}+\cdots+2^{d(n_1-k_2n_2)})+A_3$$

$$A_3=2^{d(n_3-1)}+2^{d(n_3-2)}+\cdots+2^d+1$$

$$\vdots$$

$$A_{t-1}=2^{d(n_{t-1}-1)}+2^{d(n_{t-1}-2)}+\cdots+2^d+1$$

$$A_t=2^{d(n_t-1)}+2^{d(n_t-2)}+\cdots+2^d+1$$

$$A_{t-1}=A_t(2^{d(n_{t-1}-n_t)}+2^{d(n_{t-1}-2n_t)}+\cdots+2^d)+1$$

根据主教材中定理 11.5，A_0 与 A_1 互素，得证 $\gcd(2^m-1,2^n-1)=2^d-1$.

方法 2 由于 m_1、n_1 互素，存在整数 a、b，使得 $am_1+bn_1=1$. 不妨设 $a>0,b<0$. 令 $c=-b$，则

$$B=2^{d(a-1)m_1}+2^{d(a-2)m_1}+\cdots+2^{dm_1}+1$$

$$C=2^{d((c-1)n_1+1)}+2^{d((c-2)n_1+1)}+\cdots+2^{d(n_1+1)}+2^d$$

有

$$A_0B=2^{d(am_1-1)}+2^{d(am_1-2)}+\cdots+2^d+1$$

$$A_1C=2^{dcn_1}+2^{d(cn_1-1)}+\cdots+2^d=2^{d(am_1-1)}+2^{d(am_1-2)}+\cdots+2^d$$

从而，$A_0B-A_1C=1$，根据主教材中的定理 11.8，A_0 与 A_1 互素，得证 $\gcd(2^m-1,2^n-1)=2^d-1$.

11.49 根据梅森数的定义和上题可立即得到.

11.50 32，31，29，27 和 25 两两互素. 由题 11.48，$2^{32}-1,2^{31}-1,2^{29}-1,2^{27}-1,2^{25}-1$ 两两互素.

11.51 不妨设 $n<m$，于是

$$2^{2^m}+1=(2^{2^n}+1)(2^{2^m-2^n}-2^{2^m-2\cdot 2^n}+2^{2^m-3\cdot 2^n}-\cdots+2^{2^m-(2^{m-n}-1)2^n}-1)+2$$

由主教材中定理 11.5，$\gcd(F_m,F_n)=\gcd(F_n,2)$. 注意到 F_n 是奇数，$\gcd(F_n,2)=1$，得证 $\gcd(F_m,F_n)=1$，从而 F_m 与 F_n 互素.

11.52 设 n 是大于 3 的素数，$\phi(n)=n-1$. 又 $n+1$ 是偶数，有 $\frac{n-1}{2}$ 个小于 $n+1$ 的偶数，它们均与 $n+1$ 不互素，故 $\phi(n+1)\leqslant n-\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}<n-1=\phi(n)$. 而大于 3 的素数有无穷多个，证毕.

11.53 (1) **分析**：由于在模 m 同余关系下保持与 m 的互素性，可以令 $Z_m^*=\{[a]_m \mid a$ 与 m 互素$\}$，$|Z_m^*|=\phi(m)$. 为了证明 $\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)$，只需给出 $Z_m^*\times Z_n^*$ 到 Z_{mn}^* 的双射函数.

证明：作映射 g：$Z_m^*\times Z_n^*\to Z_{mn}^*$ 如下 $g([a]_m,[b]_n)=[an+bm]_{mn}$.

首先证明 g 的定义是有效的. 若 $a\equiv a'\pmod m$，$b\equiv b'\pmod n$，即 $m\mid a-a'$，$n\mid b-b'$，则 $mn\mid(an+bm)-(a'n+b'm)$，即 $an+bm\equiv a'n+b'm\pmod{mn}$.

又若 a 与 m 互素，b 与 n 互素，则 $an+bm$ 与 mn 互素. 假设不然，$d=\gcd(an+bm,mn)>1$. 由于 m 与 n 互素，$d=d_1d_2$，$d_1\mid m$，$d_2\mid n$，d_1，d_2 中至少有一个大于 1，并且当 $d_1>1$ 时 d_1 与 n 互素，当 $d_2>1$ 时 d_2 与 m 互素. 不妨设 $d_1>1$，有 $d_1\mid an+bm$，得到 $d_1\mid an$，而 d_1 与 n 互素，故 $d_1\mid a$，与 a，m 互素矛盾. 这就证明了 g 的定义是有效的.

其次证明 g 是单射. 若 $an+bm\equiv a'n+b'm\pmod{mn}$，即 $mn\mid(a-a')n+(b-b')m$. 当然有 $m\mid(a-a')n+(b-b')m$，从而 $m\mid(a-a')n$. 而 m 与 n 互素，故 $m\mid a-a'$，即 $a\equiv$

$a'(\mathrm{mod}\ m)$. 同理有 $b\equiv b'(\mathrm{mod}\ n)$. 得证 g 是单射.

最后证明 g 是满射. 由于 m 与 n 互素,存在整数 x,y 使得 $xn+ym=1$. 对任意的整数 c,若 c 与 mn 互素,则 c 与 m 互素. x 与 m 也互素,故 cx 与 m 互素. 从而$[cx]_m\in Z_m^*$. 同理,$[cy]_n\in Z_n^*$. 而 $g([cx]_m,[cx]_n)=[cxn+cym]_{mn}=[c]_{mn}$,得证 g 是满射.

因为 g 是双射,故$|Z_m^*|\times|Z_n^*|=|Z_{mn}^*|$,即 $\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)$.

(2) 当 $k=1$ 时,$\phi(p)=p-1$. 当 $k>1$ 时,对 $0\leqslant x<p^k$,x 与 p^k 不互素当且仅当$p\mid x$,即 $x=px_1$,$0\leqslant x_1<p^{k-1}$,故$\{0,1,\cdots,p^k-1\}$中有 p^{k-1}个与 p^k 不互素,从而有 $p^k-p^{k-1}=p^{k-1}(p-1)$个与 p^k 互素,即 $\phi(p^k)=p^{k-1}(p-1)$.

(3) 由(1)和(2)立即得到.

11.54 设 $n=2^km$,m 是奇数.

若 $k\geqslant2$,根据题 11.53 (1)和(2),$\phi(n)=2^{k-1}\phi(m)$. 而 $k-1\geqslant1$,有 $2\mid\phi(n)$.

若 $k<2$,则 m 含有素因子 $p\geqslant3$. 根据上题,$\phi(n)$含因子 $p-1$. 而 $2\mid p-1$,故有 $2\mid\phi(n)$.

11.55 因为 n 是素数,每一个 $x(1\leqslant x\leqslant n-1)$的模 n 逆 $x^{-1}(1\leqslant x^{-1}\leqslant n-1)$存在.

先证明对于 $1\leqslant x,y\leqslant n-1$,若 $x\neq y$,则 $x^{-1}\not\equiv y^{-1}(\mathrm{mod}\ n)$. 假设不然,$x^{-1}\equiv y^{-1}(\mathrm{mod}\ n)$. 两边同乘 xy,得 $y\equiv x(\mathrm{mod}\ n)$,矛盾. 注意到,$1^{-1}=1$,$(n-1)^{-1}=n-1$,故当 $1<x<n-1$ 时,$1<x^{-1}<n-1$.

再证明当 $1<x<n-1$ 时,$x^{-1}\not\equiv x(\mathrm{mod}\ n)$. 假设不然,$x^{-1}\equiv x(\mathrm{mod}\ n)$. 两边同乘 x,得 $x^2\equiv1(\mathrm{mod}\ n)$. 已知 n 是素数,由题 11.46,必有 $x\equiv1(\mathrm{mod}\ n)$或 $x\equiv-1\equiv n-1(\mathrm{mod}\ n)$,与 $1<x<n-1$ 矛盾.

根据上述 2 条,$\{2,3,\cdots,n-2\}$可被划分成互不相交的对(x,x^{-1}).

11.56 必要性. 当 $n=2$ 和 3 时,显然成立. 设 $n>3$ 是素数,根据题 11.55,$2,3,\cdots,n-2$ 可两两配对,使得每一对的乘积在模 n 下等于 1. 于是,$(n-1)!\equiv n-1\equiv-1(\mathrm{mod}\ n)$.

充分性. 设$(n-1)!\equiv-1(\mathrm{mod}\ n)$,要证明 n 是素数. 假设不然,n 是合数,则存在$1<a,b<n$,使 $n=ab$. 于是,$a\mid(n-1)!$. 显然 $a\nmid(n-1)!+1$,即$(n-1)!\not\equiv-1(\mathrm{mod}\ a)$,而$(n-1)!\equiv-1(\mathrm{mod}\ n)$且 $n=ab$,应有$(n-1)!\equiv-1(\mathrm{mod}\ a)$,矛盾.

11.57 (1) $2^4\equiv1(\mathrm{mod}\ 5)$,$2^{325}\equiv2^{4\times81+1}\equiv2(\mathrm{mod}\ 5)$,得 $2^{325}\ \mathrm{mod}\ 5=2$.

(2) $3^6\equiv1(\mathrm{mod}\ 7)$,$3^{516}\equiv3^{6\times86}\equiv1(\mathrm{mod}\ 7)$,得 $3^{516}\ \mathrm{mod}\ 7=1$.

(3) $8^{10}\equiv1(\mathrm{mod}\ 11)$,$8^{1003}\equiv8^{10\times100+3}\equiv8^3\equiv6(\mathrm{mod}\ 11)$,得 $8^{1003}\ \mathrm{mod}\ 11=6$.

11.58 由欧拉定理,$m^{\phi(n)}\equiv1(\mathrm{mod}\ n)$,即 $n\mid m^{\phi(n)}-1$. 同理 $m\mid n^{\phi(m)}-1$. 从而,$mn\mid(m^{\phi(n)}-1)(n^{\phi(m)}-1)$,即 $mn\mid m^{\phi(n)}n^{\phi(m)}-(m^{\phi(n)}+n^{\phi(m)}-1)$. 而 $mn\mid m^{\phi(n)}n^{\phi(m)}$,故有 $mn\mid m^{\phi(n)}+n^{\phi(m)}-1$,得证 $m^{\phi(n)}+n^{\phi(m)}\equiv1(\mathrm{mod}\ mn)$.

11.59 由费马小定理,$(f(x))^p\equiv f(x)(\mathrm{mod}\ p)$. 又 $x^p\equiv x(\mathrm{mod}\ p)$,从而 $f(x^p)\equiv f(x)(\mathrm{mod}\ p)$. 得证 $(f(x))^p\equiv f(x^p)(\mathrm{mod}\ p)$.

11.60 因为 p 是素数且 $p\nmid a$,故 a 与 p^k 互素. 由欧拉定理,$a^{\phi(p^k)}\equiv1(\mathrm{mod}\ p^k)$,即 $p^k\mid a^{\phi(p^k)}-1$. 而由题 11.53,$\phi(p^k)=p^{k-1}(p-1)$,得证 $p^k\mid a^{p^{k-1}(p-1)}-1$.

第 12 章 离散概率

12.1 内容提要

1. 随机事件与概率

样本空间,离散样本空间,随机事件及其概率,必然事件与不可能事件.

和事件 $A\cup B$,积事件 $A\cap B$,差事件 $A-B$,逆事件 $\overline{A}=\Omega-A$,以及两个事件互不相容.

2. 条件概率与独立性

设 $P(A)>0$,在事件 A 发生的条件下事件 B 的条件概率

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

A 和 B **相互独立**:$P(AB)=P(A)P(B)$.

$n(n\geqslant 3)$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**:对任意的正整数 $k\leqslant n$ 和 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$.

伯努利概型:在相同的条件下重复进行 n 次试验,每次试验的结果只有两个——事件 A 发生或不发生,且各次试验是相互独立的.

计算公式:

1° **加法公式** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

当 A 与 B 互不相容时,$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

2° **若当公式**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容时,$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

3° $P(\overline{A})=1-P(A)$.

4° **乘法公式** 设 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$.

设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,$n\geqslant 2$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

5° **全概率公式** 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间的一个划分,且 $P(B_i)>0$,$i=1,2,\cdots,n$,A 是任一随机事件,则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

6° **二项概率公式** 设在 n 次伯努利试验中每次试验事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则 A 恰好发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$次的概率为

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, \quad q=1-p$$

3. 离散型随机变量

随机变量：样本空间 Ω 上的实值函数 $X:\Omega\to R$.

离散型随机变量：只可能取到有穷个或可数无穷个值的随机变量.

离散型随机变量 X 的**分布律**

$$P\{X=a_k\}=p_k \qquad k=1,2,\cdots$$

其中 $a_1,a_2,\cdots$ (有穷个或可数无穷个)是 X 所有可能取到的值.

(1) 对所有的 k，$0\leqslant p_k\leqslant 1$；

(2) $\sum_k p_k = 1$.

离散型随机变量的独立性

常用分布 0-1分布，二项分布 $B(n,p)$，泊松分布，超几何分布，几何分布，帕斯卡分布与负二项分布.

数学期望 $E(X) = \sum_k a_k p_k$.

随机变量函数期望的计算公式 设 $\varphi(x)$ 是一实函数，X 的分布律为 $P\{X = a_k\} = p_k$，$k = 1,2,\cdots$. 如果 $\sum_k \varphi(a_k)p_k$ 绝对收敛，则 $E(\varphi(X)) = \sum_k \varphi(a_k)p_k$.

数学期望的性质：

(1) $E(C)=C$.

(2) $E(CX)=CE(X)$.

(3) $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$.

(4) 如果 X 与 Y 相互独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则 $E(X_1X_2\cdots X_n)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n)$.

(5) 施瓦兹不等式 $[E(XY)]^2\leqslant E(X^2)E(Y^2)$.

方差 $D(X)=E[(X-EX)^2]$.

k 阶原点矩 $E(X^k) = \sum_i a_i^k p_i \qquad k = 1,2,\cdots$

方差的性质：

(1) $D(C)=0$.

(2) $D(CX)= C^2D(X)$.

(3) 如果 X 与 Y 相互独立，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则

$$D(X_1\pm X_2\pm\cdots\pm X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)$$

(4) $D(X)=E(X^2)-(EX)^2$.

(5) **切比雪夫不等式** 设随机变量 X 的期望 EX 和方差 DX 存在，则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

4. 概率母函数

设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=k\}=p_k, k=0,1,2,\cdots$, X 的**概率母函数**(简称**母函数**)

$$\psi_X(s)=E(s^X)=\sum_k p_k s^k \qquad -1\leqslant s\leqslant 1$$

概率母函数的性质:

(1) 线性性质 $\psi_{aX+b}(s)=s^b\psi_X(s^a)$,其中 a,b 是非负整数.

(2) 有限个独立随机变量之和的母函数等于各个随机变量母函数的乘积.

(3) 设 $E(X^2)$ 存在,则

$$E(X)=\psi'(1),\quad E(X^2)=\psi''(1)+\psi'(1)$$
$$D(X)=\psi''(1)+\psi'(1)-\psi'^2(1)$$

12.2 习 题

12.1 从一副扑克牌的 13 张黑桃中,一张接一张有放回地抽取 3 张,求:

(1) 没有同号的概率.

(2) 有同号的概率.

(3) 至多有 2 张同号的概率.

12.2 箱中有 10 件电子产品,已知其中混有 3 件次品. 为了找出次品,逐件进行测试. 试求:

(1) 只测试 3 件就找到全部次品的概率.

(2) 测试 10 件才找到全部次品的概率.

12.3 有 2 只红球和 2 只绿球,将这 4 只球随机地放入 2 个盒子中,每个盒中放 2 只球,求同色球在同一盒中的概率.

12.4 掷 2 枚骰子总点数为 8 与掷 3 枚骰子总点数为 8,哪种可能性更大?

12.5 掷 2 枚骰子总点数为 9 与掷 3 枚骰子总点数为 9,哪种可能性更大?

12.6 掷 2 枚完全相同、但不均匀的骰子,证明点数相同的概率不小于$\frac{1}{6}$.

12.7 4 个人中至少有 2 人的生日在同一天的概率是多少?(假设一年 365 天).

12.8 袋中有编号为 1,2,3,4 的 4 个小球,从袋中不放回地取 4 次,每次取一个,求每次取到的编号都与次序不同的概率.

12.9 设 A,B 是 2 个随机事件,已知 $P(A)=0.4, P(B)=0.3$.

(1) 如果 $P(A\cup B)=0.6$,求 $P(AB), P(A\mid B)$.

(2) 如果 A 和 B 互不相容,求 $P(A\cup B), P(A-B)$.

(3) 如果 A 和 B 相互独立,求 $P(A\cup B), P(A-B)$.

12.10 设 A,B 是 2 个随机事件且 $A\cup B=\Omega$,证明:

$$P(AB)=P(A)P(B)-P(\bar{A})P(\bar{B})$$

12.11 证明:$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\leqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

12.12 将 3 个乒乓球放入 4 只杯子中,每个乒乓球放入每只杯子中的可能性相同. 求

杯中球的最大个数为 1,2,3 的概率.

12.13 三个人各自独立地破译一个密码,他们能破译的概率分别为 0.2,0.4 和0.25. 求这个密码能被破译的概率.

12.14 盒中有 12 只乒乓球,其中 9 只是新的,3 只是用过的. 第一次从中任取 3 只,用后放回盒中. 第二次再从盒中任取 3 只.

(1) 求第二次取到 3 只新球的概率.

(2) 已知第二次取到 3 只新球,求第一次取到 3 只新球的概率.

12.15 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是样本空间的一个划分且 $P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n,A$ 是任意随机事件且 $P(A)>0$,证明:对每一个 $i(i=1,2,\cdots,n)$,

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}$$

此式称作**贝叶斯(Bayes)公式**.

12.16 证明:如果 A 与 B 相互独立,则 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

12.17 卜里耶(Polya)坛子模型. 设坛子中有 b 个黑球和 r 个红球,现从中每次取出一个,取出后放回,并将 c 个与所取出的球同颜色的球放入坛中. 记 B_n:第 n 次取得黑球,证明:

$$P(B_n)=\frac{b}{b+r} \qquad n=1,2,\cdots$$

这里 b 和 r 是正整数,c 是整数,并且当 $c<0$ 时,$b+r-(n-1)c>0$. 当 $c=0$ 时为放回抽样,当 $c=-1$ 时为不放回抽样.

12.18 巴拿赫火柴问题. 某人买了 2 盒火柴,每盒有 n 根,每次从任一盒中取一根使用. 求当他用完一盒(取最后一根)时,另一盒有 $r(1\leqslant r\leqslant n)$根的概率. 又问:另一盒剩几根的可能性最大?

12.19 买票问题. $2n$ 个人排队买票,其中 n 个人每人拿一张 5 圆人民币,n 个人每人拿一张 10 圆人民币. 每张票 5 圆,售票处没有预备零钱,求售票中没有人因为找不了钱必须让后面的人先买的概率.

12.20 对超几何分布验证:

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1$$

其中,N,M,n 均为正整数,$M\leqslant N,n\leqslant N-M,l=\min\{M,n\}$.

12.21 对负二项分布验证:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} q^k p^r = 1$$

其中,$0<p<1,q=1-p,r$ 是正整数.

12.22 袋中有 1,2,3,4,5 五个号码牌,从中任取 3 个,以 X 表示取出的 3 个号码中的最大号码. 试写出 X 的分布律.

12.23 盒中有 3 个白球和 2 个黑球,从中任取 2 个,以 X 表示取得的白球数,试写出

X 的分布律.

12.24 设某射手每次射击击中目标的概率为 0.8,共射击 30 次,求击中目标次数 X 的分布律.

12.25 设某射手每次射击击中目标的概率为 0.8,连续向一个目标射击,直到击中目标为止.求射击次数 X 的分布律.

12.26 设昆虫产卵数 X 服从参数 λ 的泊松分布,又设一个虫卵能孵化成昆虫的概率为 $p(0<p<1)$,并且虫卵是否能孵化成昆虫是相互独立的,把此昆虫下一代的条数记作 Y,试给出 Y 的分布律.

12.27 有 m 个盒子和许多小球,将小球一个一个地放入盒子中,每个小球放入每个盒子的可能性相等.试写出下述随机变量 X 的分布律.

(1) 共放了 n 个小球,X 是某个指定的盒子中的小球数.

(2) X 是第一次把小球放入某个指定的盒子中后,放入所有盒子中的小球数.

(3) X 是在某个指定的盒子中放入第 r 个小球后,放入所有盒子中的小球数.

(4) X 是直到每个盒子中都有小球时放入所有盒子中的小球数.

12.28 设 $X\sim B(n,p)$,整数 k,$0\leqslant k\leqslant n$.证明:

(1) $P\{X\geqslant k\}\leqslant\binom{n}{k}p^k$.

(2) $P\{X\leqslant k\}\leqslant\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}$.

12.29 某射手的命中率为 $p(0<p<1)$,他每次取 10 发子弹,若击中目标或打完了子弹就结束这次练习.问他每次练习平均用几发子弹?

12.30 求习题 12.22 和习题 12.23 中的 X 的期望和方差.

12.31 掷 n 枚骰子,求点数之和的期望和方差.

12.32 将 n 个小球放入 m 个盒中,设每个小球放入每个盒中是等可能的,求有球的盒子数的期望.

12.33 甲乙两人对局,约定连胜两局者获胜并终止这次比赛.设在每局中甲获胜的概率为 p,乙获胜的概率为 $1-p$,求他们每次比赛的平均对局数.

12.34 袋中有 k 个 k 号球,$k=1,2,\cdots,n$.从中摸出一个球,求摸出的球的号码的期望.

12.35 设 $f(x)(x\geqslant 0)$单调非降且恒大于 0,又设 X 是一离散型随机变量且$E[f(X)]$存在.证明:对任意的 $t>0$,

$$P\{|X|\geqslant t\}\leqslant\frac{1}{f(t)}E[f(|X|)]$$

12.36 设 X 是一非负离散型随机变量且 $E(X)$存在.证明:对任意的 $t>0$,

$$P\{X\geqslant t\}\leqslant\frac{1}{t}E(X)$$

此不等式称作**马尔可夫不等式**.

12.37 设随机变量 X 取非负整数值且数学期望存在,试证明:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X\geqslant k\}$$

12.38　设离散型随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的数学期望存在，Y 的分布律为 $P\{Y=i\}=c_i,i=1,2,\cdots,n$. 试证明：

$$E(X_Y)=\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i)$$

12.39　证明母函数的性质12.4.1和性质12.4.2，即

(1) $\psi_{aX+b}(s)=s^b\psi_X(s^a)$，其中 a,b 是非负整数.

(2) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，母函数依次为 $\psi_1(s),\psi_2(s),\cdots,\psi_n(s)$. 又 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$，则

$$\psi_Y(s)=\prod_{i=1}^{n}\psi_i(s)$$

12.40　设 $X_1,X_2,\cdots,X_r$ 相互独立且都服从参数 p 的几何分布，其中 $0<p<1$，又 $X=X_1+X_2+\cdots+X_r$. 证明：X 服从参数 p,r 的帕斯卡分布.

12.41　设 X 服从参数 p,r 的帕斯卡分布，其中 $0<p<1$，r 是正整数. 试计算 X 的母函数、期望和方差.

12.42　设在伯努利试验中，每次试验事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$. 把首次出现 A 发生之后接着 A 不发生的试验次数记作 X，即 X 等于使得 A 在第 $n-1$ 次发生且在第 n 次不发生的最小的 n. 求 X 的母函数以及数学期望和方差.

12.3　习题解答与分析

12.1　设 A：没有同号，B：有同号，C：至多有2张同号.

(1) $P(A)=\dfrac{P(13,3)}{13^3}=\dfrac{13\times12\times11}{13^3}=\dfrac{132}{169}=0.781$

(2) $B=\overline{A},P(B)=1-P(\overline{A})=\dfrac{37}{169}=0.219$

(3) $\overline{C}$：3张都同号，$P(C)=1-P(\overline{C})=1-\dfrac{13}{13^3}=\dfrac{168}{169}=0.994$

12.2　(1) 不放回地抽取3次，每次都抽取到次品，其概率为

$$\frac{3!}{10\times9\times8}=\frac{1}{120}$$

(2) **解法1**　不放回地抽取10次，第10次抽取到次品，其概率为

$$\frac{3\times9!}{10!}=\frac{3}{10}$$

解法2　只需考虑最后一次，测试10次才找到全部次品当且仅当第10次抽到的是次品，故其概率为 $\dfrac{3}{10}$.

12.3　从4只球中任取2只放入第一个盒子中，剩下的2只放入第二个盒子中，共有 $\dbinom{4}{2}=6$ 种可能. 同色球在同一盒中有2种可能，故其概率为 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

12.4　**方法1**　掷2枚骰子，共有 $6^2=36$ 种可能. 总点数为8的可能情况：2点+6点，

6 点+2 点,3 点+5 点,5 点+3 点,4 点+4 点,共 5 种. 故其概率为$\frac{5}{36}$.

掷 3 枚骰子,共有 $6^3=216$ 种可能. 总点数为 8 的可能情况：2 个 1 点和 1 个 6 点,有 $P(3,1)=3$ 种可能;1 个 1 点,1 个 2 点和 1 个 5 点,有 $3!=6$ 种可能;1 个 1 点,1 个 3 点和 1 个 4 点,有 6 种可能;2 个 2 点和 1 个 4 点,有 3 种可能;1 个 2 点和 2 个 3 点,有 3 种可能,共有 $3+6+6+3+3=21$ 种可能. 故其概率为$\frac{21}{216}=\frac{7}{72}$.

$\frac{5}{36}>\frac{7}{72}$,所以掷 2 枚骰子总点数为 8 的可能性,比掷 3 枚骰子总点数为 8 的可能性大.

方法 2 用生成函数求可能性的种数.

2 枚骰子的点数之和等于 8. 考虑

$$x_1+x_2=8 \qquad 1\leqslant x_1,x_2\leqslant 6$$

生成函数

$$\begin{aligned}G(y)&=(y+y^2+\cdots+y^6)^2\\&=y^2(1-y^6)^2(1-y)^{-2}\\&=y^2(1-2y^6+y^{12})\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+1}{1}y^r\end{aligned}$$

y^8 的系数为$\binom{7}{1}-2=5$,得 2 枚骰子的点数之和等于 8 有 5 种可能,故其概率为$\frac{5}{36}$.

3 枚骰子的点数之和等于 8. 考虑

$$x_1+x_2+x_3=8 \qquad 1\leqslant x_1,x_2,x_3\leqslant 6$$

令 $x_i'=x_i-1, i=1,2,3$,得

$$x_1'+x_2'+x_3'=5 \qquad x_i'\text{为非负整数}, \quad i=1,2,3$$

生成函数

$$H(z)=(1-z)^{-3}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+2}{2}z^r$$

z^5 的系数等于$\binom{7}{2}=\frac{7\times 6}{2}=21$,得 3 枚骰子的点数之和等于 8 有 21 种可能,故其概率为$\frac{21}{6^3}=\frac{7}{72}$.

分析 对于这类计数问题,当问题很简单的时候可以用穷举的方法和简单的排列组合公式来解决,当问题比较复杂的时候就需要使用组合计数的技巧,如利用生成函数等.

12.5 2 枚骰子的点数之和等于 9. 考虑

$$x_1+x_2=9 \qquad 1\leqslant x_1,x_2\leqslant 6$$

生成函数

$$\begin{aligned}G(y)&=(y+y^2+\cdots+y^6)^2\\&=y^2(1-y^6)^2(1-y)^{-2}\\&=y^2(1-2y^6+y^{12})\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+1}{1}y^r\end{aligned}$$

y^9 的系数为$\binom{8}{1}-2\binom{2}{1}=4$,得 2 枚骰子的点数之和等于 9 有 4 种可能,故其概率为$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

3 枚骰子的点数之和等于 9. 考虑

$$x_1+x_2+x_3=9 \quad 1\leqslant x_1,x_2,x_3\leqslant 6$$

生成函数

$$\begin{aligned} H(z) &= (z+z^2+\cdots+z^6)^3 \\ &= z^3(1-z^6)^3(1-z)^{-3} \\ &= z^3(1-3z^6+3z^{12}-z^{18})\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+2}{2}z^r \end{aligned}$$

z^9 的系数为$\binom{8}{2}-3=25$,得3枚骰子的点数之和等于9有25种可能,故其概率为$\frac{25}{6^3}=\frac{25}{216}$.

$\frac{25}{216}>\frac{1}{9}$,所以掷3枚骰子总点数为9的可能性比掷2枚骰子总点数为9的可能性大.

12.6 设一枚骰子的点数 X 的分布律为 $P\{X=i\}=p_i, i=1,2,\cdots,6$,2枚骰子的点数相同的概率为 $p=\sum_{i=1}^{6}p_i^2$.

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{i=1}^{6}p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{6}p_i^2 + 2\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{6}p_ip_j \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{6}p_i^2 + \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{6}(p_i^2+p_j^2) \\ &= 6\sum_{i=1}^{6}p_i^2 = 6p \end{aligned}$$

得证 $p\geqslant\frac{1}{6}$.

12.7 设 A:4个人中至少有2人的生日在同一天.

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{P(365,4)}{365^4}=0.016$$

12.8 记 A:每次取到的编号都与次序不同,B_i:第 i 次取到 i 号小球,$i=1,2,3,4$

$$A=\overline{B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4}$$

$$P(B_i)=\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4} \qquad 1\leqslant i\leqslant 4$$

$$P(B_iB_j)=\frac{2!}{4!}=\frac{1}{12} \qquad 1\leqslant i<j\leqslant 4$$

$$P(B_iB_jB_k)=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24} \qquad 1\leqslant i<j<k\leqslant 4$$

$$P(B_1B_2B_3B_4)=\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$$

于是,由若当公式得

$$\begin{aligned} P(A) &= 1-P(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4) \\ &= 1-\sum_{i=1}^{4}P(B_i)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}P(B_iB_j)-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}P(B_iB_jB_k)+P(B_1B_2B_3B_4) \\ &= 1-4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{12}-4\times\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{3}{8} \end{aligned}$$

12.9 (1) 由加法公式得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.3-0.6=0.1$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{1}{3}$$

(2) 若 A 与 B 互不相容，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.4+0.3=0.7$$
$$P(A-B)=P(A)=0.4$$

(3) 若 A 与 B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)=0.4\times0.3=0.12$.
于是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.3-0.12=0.58$$
$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4-0.12=0.28$$

12.10 右边 $=P(A)P(B)-P(\bar{A})P(\bar{B})$

$$
\begin{aligned}
&=P(A)P(B)-(1-P(A))(1-P(B))\\
&=P(A)+P(B)-1\\
&=P(A)+P(B)-P(A\cup B) \qquad (P(A\cup B)=P(\Omega)=1)\\
&=P(AB)=\text{左边} \qquad (\text{加法公式})
\end{aligned}
$$

12.11 由于 $P(AB)\geqslant 0$，故有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant P(A)+P(B) \qquad (*)$$

用归纳法. 当 $n=1$ 时，结论自然成立.

假设对于 n 结论成立，则有

$$
\begin{aligned}
&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n+1})\\
\leqslant\, &P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)+P(A_{n+1}) \qquad \text{由}(*)\\
\leqslant\, &P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+P(A_{n+1}) \qquad \text{由归纳假设}
\end{aligned}
$$

得证对于 $n+1$ 结论也成立.

12.12 记 A_i：杯中球的最大个数为 i，$i=1,2,3$.

3 个乒乓球放入 4 个杯中共有 4^3 种可能.

A_3 发生当且仅当 3 个乒乓球放入 1 个杯中，有 4 种可能，故

$$P(A_3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$$

A_1 发生当且仅当 3 个乒乓球放入 3 个不同的杯中，有 $P(4,3)=4\times3\times2$ 种可能，故

$$P(A_1)=\frac{4\times3\times2}{4^3}=\frac{3}{8}$$

A_2 发生当且仅当 2 个乒乓球放入 1 个杯中，而剩下的 1 个乒乓球放入另一个杯中. 从 3 个乒乓球中任取 2 个(有 $\binom{3}{2}=3$ 种可能)放入 1 个杯中(有 4 种可能)，剩下的 1 个乒乓球放入剩下的 3 个杯中的任意 1 个中(有 3 种可能)，故

$$P(A_2)=\frac{3\times4\times3}{4^3}=\frac{9}{16}$$

或者，由 $P(A_1)$ 和 $P(A_3)$ 求 $P(A_2)$.

$$P(A_2)=1-P(A_1)-P(A_3)=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{16}=\frac{9}{16}$$

分析 设想将 4 个杯子顺序排好，将乒乓球一个一个地放入杯中，这是可重复排列，总数为 4^3. 注意放入不同杯中乒乓球要考虑放入的顺序，如在第 1,2,3 次和在第 2,3,1 次把 3 个球分别放入第 1,2,3 个杯子中是不同的 2 种情况，故在计算 $P(A_1)$ 时要用排列数

$P(4,3)$;而放入同一个杯中的乒乓球不计放入的顺序,如把3个球放入第一个杯子中是一种情况,与3个球的放入顺序无关,故在计算$P(A_2)$时用组合数$\binom{3}{2}$.

12.13 设A_i:密码被第i个人破译,$i=1,2,3$. 根据题设,A_1、A_2、A_3相互独立. 所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)\\&\quad -P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1)P(A_2)\\&\quad -P(A_1)P(A_3)-P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_2)P(A_3)\\&=0.2+0.4+0.25-0.2\times 0.4-0.2\times 0.25\\&\quad -0.4\times 0.25+0.2\times 0.4\times 0.25\\&=0.64\end{aligned}$$

12.14 设A_i:第一次取到i只新球,$i=0,1,2,3$,B:第二次取到3只新球. 所求的概率分别是$P(B)$和$P(A_3|B)$.

$$P(A_0)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{1}{220},\qquad P(A_1)=\frac{\binom{9}{1}\binom{3}{2}}{\binom{12}{3}}=\frac{27}{220}$$

$$P(A_2)=\frac{\binom{9}{2}\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}}=\frac{108}{220},\qquad P(A_3)=\frac{\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{84}{220}$$

$$P(B\mid A_0)=\frac{\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{84}{220},\qquad P(B\mid A_1)=\frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{56}{220}$$

$$P(B\mid A_2)=\frac{\binom{7}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{35}{220},\qquad P(B\mid A_3)=\frac{\binom{6}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{20}{220}$$

(1) 由全概率公式

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)\\&=\frac{1}{220}\times\frac{84}{220}+\frac{27}{220}\times\frac{56}{220}+\frac{108}{220}\times\frac{35}{220}+\frac{84}{220}\times\frac{20}{220}\\&=0.1458\end{aligned}$$

(2) 由条件概率的定义和乘法公式

$$\begin{aligned}P(A_3|B)&=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}\\&=\frac{84}{220}\times\frac{20}{220}\Big/0.1458=0.2381\end{aligned}$$

12.15 $P(B_i \mid A)=\dfrac{P(B_iA)}{P(A)}$ （条件概率的定义）

$=\dfrac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A \mid B_j)}$ （乘法公式和全概率公式）

12.16 $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$

$=P(A)-P(A)P(B)$ （A 与 B 相互独立）

$=P(A)[1-P(B)]$

$=P(A)P(\bar{B})$

得证 A 与 $\bar{B}$ 相互独立.

由 A 与 B 相互独立$\Rightarrow A$ 与 $\bar{B}$ 相互独立，不难得到 A 与 B 相互独立$\Rightarrow\bar{A}$ 与 B 相互独立和 A 与 B 相互独立$\Rightarrow A$ 与 $\bar{B}$ 相互独立$\Rightarrow\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立.

12.17 设 A_i：前 $n-1$ 次取到 i 个黑球和 $n-i-1$ 个红球，$i=0,1,\cdots,n-1$
由全概率公式得到

$$P(B_n)=\sum_{i=0}^{n-1}P(A_i)P(B_n \mid A_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b(b+c)\cdots(b+(i-1)c)r(r+c)\cdots(r+(n-i-2)c)}{(b+r)(b+r+c)\cdots(b+r+(n-2)c)}\cdot\frac{b+ic}{b+r+(n-1)c}$$

$$=\frac{b}{b+r}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(b+c)((b+c)+c)\cdots((b+c)+(i-1)c)r(r+c)\cdots(r+(n-i-2)c)}{((b+c)+r)((b+c)+r+c)\cdots((b+c)+r+(n-2)c)}$$

$\sum\limits_{i=0}^{n-1}$ 中的项是开始时坛中有 $b+c$ 个黑球和 r 个红球，前 $n-1$ 次取到 i 个黑球和 $n-i-1$ 个红球的概率，其和等于 1，故得证 $P(B_n)=\dfrac{b}{b+r}$.

12.18 记 A：从第 1 盒中取，B：从第 2 盒中取，$P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$.

当用完一盒时另一盒还有 r 根$\Leftrightarrow$在前 $2n-r-1$ 次中 A 发生 $n-1$ 次且第 $2n-r$ 次 A 发生，或者在前 $2n-r-1$ 次中 B 发生 $n-1$ 次且第 $2n-r$ 次 B 发生. 于是，所求概率为

$$p_r=2\binom{2n-r-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}$$

$$=\binom{2n-r-1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r-1}$$

考虑$\dfrac{p_{r+1}}{p_r}\geqslant 1$，即$\dfrac{2(n-r)}{2n-r-1}\geqslant 1$，解得 $r\leqslant 1$. 于是，$p_1=p_2$，且当 $r>2$ 时，$p_r<p_2$，故另一盒剩 1 根和 2 根火柴的可能性最大.

12.19 如下表示整个买票过程：在平面直角坐标系中，从原点(0,0)出发，每次向右走一步，若拿的是 10 圆，则向右上方走一步；若拿的是 5 圆，则向右下方走一步. 这样整个买票过程可表示成一条从(0,0)到$(2n,0)$的折线，如图 12.1 中实线所示. 这样的折线共有 $\dbinom{2n}{n}$条.

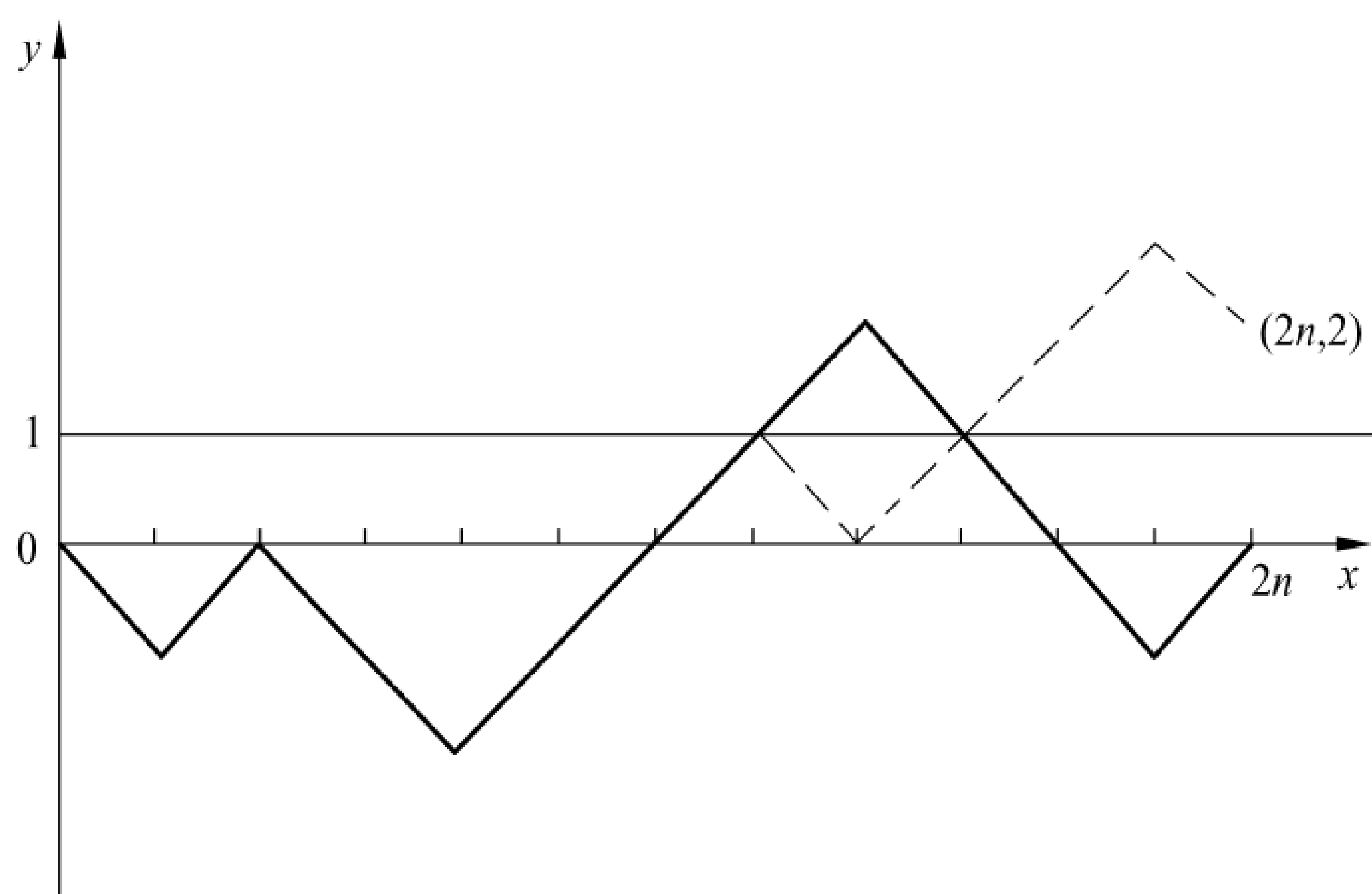


图 12.1

售票中找不了钱当且仅当折线与直线 $y=1$ 相交.

设折线与 $y=1$ 相交,将折线从第一个交点到终点 $(2n,0)$ 以 $y=1$ 为轴翻转 $180°$,如图 12.1 中虚线所示. 连同第一个交点前的部分得到一条从 $(0,0)$ 到 $(2n,2)$ 的折线. 不难看出,这种从 $(0,0)$ 到 $(2n,2)$ 的折线与原先从 $(0,0)$ 到 $(2n,0)$ 且与 $y=1$ 相交的折线一一对应. 而从 $(0,0)$ 到 $(2n,2)$ 的折线有 $\binom{2n}{n-1}$ 条,故所求概率为

$$p=1-\frac{\binom{2n}{n-1}}{\binom{2n}{n}}=\frac{1}{n+1}$$

12.20 考虑 $(1+x)^N=(1+x)^M(1+x)^{N-M}$,比较两边 x^n 的系数,得

$$\binom{N}{n}=\sum_{k=0}^{l}\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$$

得证

$$\sum_{k=0}^{l}\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=1$$

12.21 $\frac{1}{p^r}=\frac{1}{(1-q)^r}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r-1}q^k$

得证

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r-1}q^kp^r=1$$

12.22 $P\{X=3\}=\frac{1}{\binom{5}{3}}=0.1, P\{X=4\}=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}}=0.3, P\{X=5\}=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}}=0.6$

分布律为

X	3	4	5
p	0.1	0.3	0.6

12.23　$P\{X=0\}=\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=0.1, P\{X=1\}=\dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=0.6, P\{X=2\}=\dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=0.3$

分布律为

X	0	1	2
p	0.1	0.6	0.3

12.24　$X\sim B(30,0.8)$，其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{30}{k}0.8^k\times 0.2^{30-k} \qquad k=0,1,\cdots,30$$

12.25　X 服从参数 $p=0.8$ 的几何分布，其分布律为

$$P\{X=k\}=0.2^{k-1}\times 0.8 \qquad k=1,2,\cdots$$

12.26　由全概率公式，得

$$\begin{aligned} P\{Y=k\} &= \sum_{i=k}^{\infty}P\{X=i\}P\{Y=k \mid X=i\} \\ &= \sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\cdot\binom{i}{k}p^k q^{i-k} \\ &= \sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\cdot\frac{i!}{k!(i-k)!}p^k q^{i-k} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(\lambda q)^{i-k}}{(i-k)!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda q} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p} \qquad k=0,1,\cdots \end{aligned}$$

即 Y 服从参数 λp 的泊松分布.

12.27　(1) 把小球放入指定盒子中的概率为 $\dfrac{1}{m}$，n 个小球中放入指定盒子中的小球数 $X\sim B\left(n,\dfrac{1}{m}\right)$，其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-k} \qquad k=0,1,\cdots,n$$

(2) 在把小球第一次放入指定的盒子中后,放入所有盒子中的小球数 X 服从几何分布,其分布律为

$$P\{X=k\}=\left(1-\frac{1}{m}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{m}\right) \qquad k=1,2,\cdots$$

(3) 在指定的盒子中放入第 r 个小球后,放入所有盒子中的小球数 X 服从帕斯卡分布,其分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{k-1}{r-1}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{k-r}\left(\frac{1}{m}\right)^{r} \qquad k=r,r+1,\cdots$$

(4) 当 $m=1$ 时,显然 $P\{X=1\}=1$.

当 $m>1$ 时,对 $k=m,m+1,\cdots,X=k$ 当且仅当前 $k-1$ 次把小球放入 $m-1$ 个盒子中,且这 $m-1$ 个盒子中都有小球,第 k 次把小球放入剩下的一个空盒中.

不妨设第 k 次把小球放入第 m 个盒子中,记 A_i:前 $i-1$ 次没有把小球放入第 i 个盒子中,$i=1,2,\cdots,m-1$. 于是有

$$P\{X=k\}=m\cdot\frac{1}{m}\left\{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{k-1}-P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{m-1})\right\}$$

$$P(A_i)=\left(1-\frac{2}{m}\right)^{k-1} \qquad 1\leqslant i\leqslant m-1$$

$$P(A_{i_1i_2})=\left(1-\frac{3}{m}\right)^{k-1} \qquad 1\leqslant i_1<i_2\leqslant m-1$$

$$\vdots$$

$$P(A_{i_1i_2\cdots i_{m-2}})=\left(1-\frac{m-1}{m}\right)^{k-1} \qquad 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{m-2}\leqslant m-1$$

$$P(A_1A_2\cdots A_{m-1})=0$$

由若当公式

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{m-1})=\sum_{i=1}^{m-2}(-1)^{i-1}\binom{m-1}{i}\left(1-\frac{i+1}{m}\right)^{k-1}$$

得

$$P\{X=k\}=\sum_{i=0}^{m-2}(-1)^{i}\binom{m-1}{i}\left(1-\frac{i+1}{m}\right)^{k-1} \qquad k=m,m+1,\cdots$$

12.28 (1) 设 $X\sim B(n,p)$

$$\begin{aligned}P\{X\geqslant k\}&=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p^{i}q^{n-i}\\&=p^{k}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p^{i-k}q^{n-i}\\&=p^{k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{j+k}p^{j}q^{n-k-j}\end{aligned}$$

而

$$\binom{n}{j+k}\Big/\binom{n}{k}=\frac{n!}{(j+k)!\,(n-j-k)!}\cdot\frac{k!\,(n-k)!}{n!}\leqslant\frac{(n-k)!}{j!\,(n-k-j)!}=\binom{n-k}{j}$$

代入上式,得

$$P\{X\geqslant k\}\leqslant\binom{n}{k}p^k\sum_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}p^jq^{n-k-j}=\binom{n}{k}p^k$$

(2) 令 $Y=n-X\sim B(n,1-p)$，由式(1)

$$P\{X\leqslant k\}=P\{Y\geqslant n-k\}\leqslant\binom{n}{n-k}(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}$$

12.29 设 X：每次练习所用的子弹数，X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\begin{cases}q^{k-1}p & k=1,2,\cdots,9\\ q^9 & k=10\end{cases}$$

每次练习所用子弹的平均数为

$$\begin{aligned}EX&=\sum_{k=1}^{9}kq^{k-1}p+10q^9\\&=\sum_{k=1}^{10}kq^{k-1}-\sum_{k=1}^{9}kq^k=\sum_{k=1}^{10}q^{k-1}\\&=\frac{1-q^{10}}{1-q}=\frac{1-q^{10}}{p}\end{aligned}$$

12.30 (1) 题 12.22 中 X 的分布律为

X	3	4	5
p	0.1	0.3	0.6

$$E(X)=3\times0.1+4\times0.3+5\times0.6=4.5$$
$$E(X^2)=3^2\times0.1+4^2\times0.3+5^2\times0.6=20.7$$
$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=20.7-4.5^2=0.45$$

(2) 题 12.23 中的分布律为

X	0	1	2
p	0.1	0.6	0.3

$$E(X)=0\times0.1+1\times0.6+2\times0.3=1.2$$
$$E(X^2)=0^2\times0.1+1^2\times0.6+2^2\times0.3=1.8$$
$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1.8-1.2^2=0.36$$

12.31 设 X_k：第 k 枚骰子的点数，$k=1,2,\cdots,n$，则 n 枚骰子的点数之和

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

对 $k=1,2,\cdots,n$，有

$$E(X_k)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$$

$$E(X_k^2)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)=\frac{91}{6}$$

$$D(X_k)=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,故

$$EX = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{7}{2}n$$

$$DX = \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{35}{12}n$$

12.32　设 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 个盒子中有球} \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad i=1,2,\cdots,m$

则

$$P\{X_i=0\} = \left(1-\frac{1}{m}\right)^n$$

$$P\{X_i=1\} = 1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$$

$$E(X_i) = 1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n \qquad i=1,2,\cdots,m$$

而有球的盒子数 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$,从而

$$EX = \sum_{i=1}^{m} E(X_i) = m\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right]$$

12.33　设 X:每次比赛的对局数,记 A:甲胜,B:乙胜,$q=1-p$

$$X=2k \Leftrightarrow ABAB\cdots ABAA \text{ 或 } BABA\cdots BABB$$

$$X=2k+1 \Leftrightarrow ABAB\cdots ABB \text{ 或 } BABA\cdots BAA$$

于是

$$P\{X=2k\} = (pq)^{k-1}p^2 + (qp)^{k-1}q^2 = (pq)^{k-1}(p^2+q^2)$$

$$P\{X=2k+1\} = (pq)^k q + (qp)^k p = (pq)^k, \quad k=1,2,\cdots$$

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{\infty}\left[2k(pq)^{k-1}(p^2+q^2) + (2k+1)(pq)^k\right] \\ &= 2(p^2+q^2+pq)\sum_{k=1}^{\infty}k(pq)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(pq)^k \\ &= 2(1-pq)\sum_{k=1}^{\infty}k(pq)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty}(pq)^k \end{aligned}$$

而

$$\sum_{k=1}^{\infty}(pq)^k = \frac{pq}{1-pq}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

令 $x=pq$,得

$$\sum_{k=1}^{\infty}k(pq)^{k-1} = \frac{1}{(1-pq)^2}$$

代入 EX,得

$$EX = 2(1-pq)\cdot\frac{1}{(1-pq)^2} + \frac{pq}{1-pq} = \frac{2+pq}{1-pq}$$

12.34　袋中球的总数为 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

记 X：摸到的号码，X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{2k}{n(n+1)} \qquad k=1,2,\cdots,n$$

于是

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{2k}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2 \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}(2n+1) \end{aligned}$$

12.35　设 X 的分布律为 $P\{X=a_k\}=p_k,k=1,2,\cdots$,

因为 $f(x)$ $(x\geqslant 0)$单调非减，故当 $t\leqslant|a_k|$时，$f(t)\leqslant f(|a_k|)$. 于是，对任意的 $t>0$，

$$\begin{aligned} P\{|X|\geqslant t\} &= \sum_{|a_k|\geqslant t} p_k \leqslant \sum_{|a_k|\geqslant t}\frac{f(|a_k|)}{f(t)}p_k \leqslant \sum_{k}\frac{f(|a_k|)}{f(t)}p_k \\ &= \frac{1}{f(t)}E[f(|X|)] \end{aligned}$$

12.36　根据上题，取 $f(t)=t$，对任意的 $t>0$，则

$$P\{|X|\geqslant t\}\leqslant\frac{1}{t}E(X)$$

12.37　设 X 的分布律为 $P\{X=i\}=p_i,i=0,1,\cdots$，于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{X\geqslant k\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}p_i = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}p_i = \sum_{i=1}^{\infty}ip_i = E(X)$$

两个求和交换次序如图 12.2 所示.

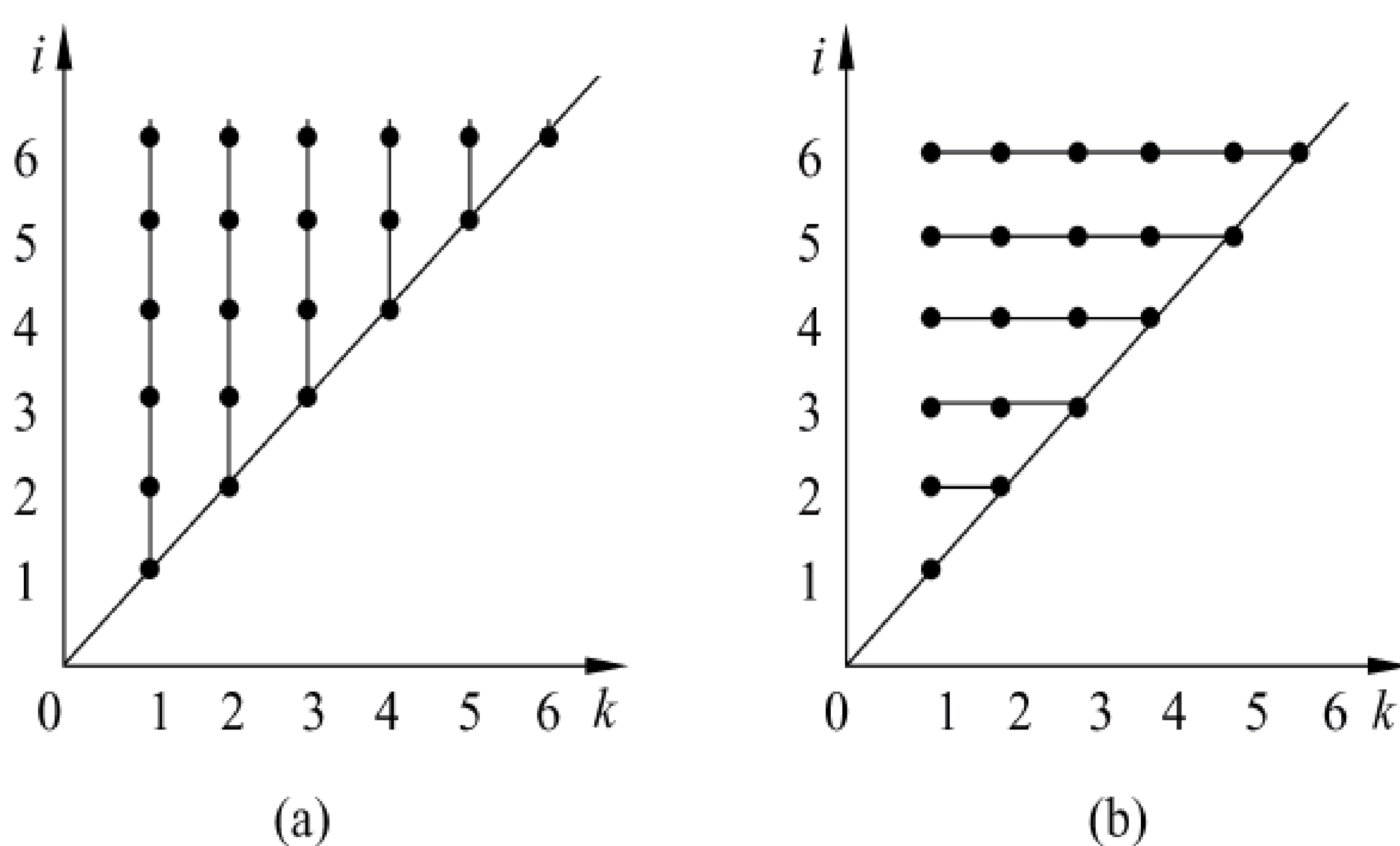


图　12.2

12.38　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 所有可能的取值为 S，由全概率公式，$\forall a\in S$，得

$$\begin{aligned} P\{X_Y = a\} &= \sum_{k=1}^{n}P\{Y=k\}P\{X_Y=a\mid Y=k\} \\ &= \sum_{k=1}^{n}c_kP\{X_k=a\} \end{aligned}$$

于是

$$E(X_Y) = \sum_{a\in S} aP\{X_Y = a\} = \sum_{a\in S} a \sum_{k=1}^{n} c_k P\{X_k = a\}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{a\in S} aP\{X_k = a\} = \sum_{k=1}^{n} c_k E(X_k)$$

12.39 (1) $\psi_{aX+b}(s)=E(s^{aX+b})=s^bE(s^{aX})=s^b\psi_X(s^a)$

(2) 由 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立可推出 $s^{X_1},s^{X_2},\cdots,s^{X_n}$ 也相互独立,故

$$\psi_Y(s) = E(s^{X_1+X_2+\cdots+X_n}) = \prod_{i=1}^{n} E(s^{X_i}) = \prod_{i=1}^{n} \psi_i(s)$$

12.40 **方法1** 已知 $X_1,X_2,\cdots,X_r$ 都服从几何分布且相互独立,其分布律为

$$P\{X_j=i\}=q^{i-1}p \qquad i=1,2,\cdots, \quad j=1,2,\cdots,r$$

于是,对 $k=r,r+1,\cdots$,有

$$P\{X = k\} = P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_r = k\}$$
$$= \sum q^{i_1-1}pq^{i_2-1}p\cdots q^{i_r-1}p = \sum q^{k-r}p^r$$

这里 $\sum$ 是对所有满足下述条件的正整数 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 求和:

$$i_1+i_2+\cdots+i_r=k$$

令 $x_j=i_j-1,j=1,2,\cdots,r$,得

$$x_1+x_2+\cdots+x_r=k-r, \quad \text{其中 } x_1,x_2,\cdots,x_r \text{ 是非负整数}$$

满足上述条件的 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 有 $\begin{pmatrix}k-1\\r-1\end{pmatrix}$ 种可能(把 $k-r$ 个1和 $r-1$ 个0任意地排成一排,$r-1$ 个0把1分成 r 段,每段中1的个数依次记作 $x_1,x_2,\cdots,x_r$,它们满足上述条件. 反之,满足上述条件的 r 个非负整数,也对应于 $k-r$ 个1和 $r-1$ 个0的一个排列),故

$$P\{X=k\}=\begin{pmatrix}k-1\\r-1\end{pmatrix}q^{k-r}p^r \qquad k=r,r+1,\cdots$$

得证 X 服从帕斯卡分布.

方法2 设在伯努利试验中每次试验事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$,记 $X_k(k=1,2,\cdots,r)$ 为从事件 A 第 $k-1$ 次发生后到第 k 次发生所做的试验次数(不含第 $k-1$ 次发生的试验,含第 k 次发生的试验),$X_1,X_2,\cdots,X_r$ 相互独立且都服从参数 p 的几何分布. 显然 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 为事件 A 第 r 次发生时所做的试验次数,故 X 服从参数 p,r 的帕斯卡分布.

12.41 根据上题 X 可表示成 r 个相互独立的几何分布之和,即

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_r$$

其中 $X_1,X_2,\cdots,X_r$ 都服从几何分布且相互独立. 主教材中例12.18已计算出

$$\psi_{X_k}(s)=\frac{ps}{1-qs}, \quad E(X_k)=\frac{1}{p}, \quad D(X_k)=\frac{q}{p^2}$$

其中 $k=1,2,\cdots,r$, $q=1-p$. 于是

$$\psi_X(s) = \prod_{k=1}^{r} \psi_{X_k}(s) = \left(\frac{ps}{1-qs}\right)^r \qquad \text{(主教材中性质 12.4.2)}$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{r}E(X_k)=\frac{r}{p}$$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{r}D(X_k)=\frac{rq}{p^2}$$

12.42　$X=n$ 当且仅当对某个 $i(0\leqslant i\leqslant n-2)$，前 i 次 A 不发生，接着从第 $i+1$ 次到第 $n-1$ 次(共 $n-i-1$ 次)A 都发生，最后在第 n 次 A 又不发生，故

$$P\{X=n\}=\sum_{i=0}^{n-2}q^ip^{n-i-1}q=p^{n-1}q\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{q}{p}\right)^i$$

$$=p^{n-1}q\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)}=pq\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q}$$

其中 $n=2,3,\cdots$，于是

$$\psi(s)=\sum_{n=2}^{\infty}pq\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q}s^n$$

$$=\frac{pqs^2}{p-q}\left\{p\sum_{n=2}^{\infty}(ps)^{n-2}-q\sum_{n=2}^{\infty}(qs)^{n-2}\right\}$$

$$=\frac{pqs^2}{p-q}\left\{\frac{p}{1-ps}-\frac{q}{1-qs}\right\}$$

$$=\frac{pqs^2}{1-s+pqs^2}$$

$$\psi'(s)=pq\frac{2s(1-s+pqs^2)+s^2(1-2pqs)}{(1-s+pqs^2)^2}$$

$$=\frac{pqs(2-s)}{(1-s+pqs^2)^2}$$

$$\psi''(s)=pq\frac{(2-2s)(1-s+pqs^2)^2+s(2-s)\times 2(1-s+pqs^2)(1-2pqs)}{(1-s+pqs^2)^4}$$

$$=\frac{2pq(1-3pqs^2+pqs^3)}{(1-s+pqs^2)^3}$$

$$\psi'(1)=\frac{1}{pq}$$

$$\psi''(1)=\frac{2(1-2pq)}{(pq)^2}$$

由主教材中性质 12.4.3，得

$$EX=\psi'(1)=\frac{1}{pq}$$

$$DX=\psi''(1)+\psi'(1)-\psi'^2(1)=\frac{2(1-2pq)}{(pq)^2}+\frac{1}{pq}-\frac{1}{(pq)^2}=\frac{1-3pq}{(pq)^2}$$

第13章 初等数论和离散概率的应用

13.1 内容提要

1. 密码学

明文和密文,加密算法和解密算法,密钥,私钥密码与公钥密码.

恺撒密码 $E(i)=(i+k)\bmod 26, i=0,1,\cdots,25$.

维吉利亚密码 $E(m_1m_2\cdots m_n)=c_1c_2\cdots c_n$,其中 $c_i=(m_i+k_i)\bmod 26, m_i=0,1,\cdots,25$, $i=1,2,\cdots,n$.

RSA 公钥密码 取两个大素数 p 和 $q(p\neq q)$,记 $n=pq, \phi(n)=(p-1)(q-1)$. 选择正整数 w,w 与 $\phi(n)$互素,设 d 是 w 的模 $\phi(n)$逆,即 $dw\equiv 1(\bmod \phi(n))$.

加密算法 $c=E(m)=m^w \bmod n$

解密算法 $D(c)=c^d \bmod n$

其中,加密密钥 w 和 n 是公开的,p、q、$\phi(n)$和 d 是保密的.

2. 产生伪随机数的方法

产生均匀伪随机数的方法 线性同余法、乘同余法.

产生离散型伪随机数的方法 离散型均匀分布伪随机数,泊松分布伪随机数和二项分布伪随机数.

3. 算法的平均复杂度分析

算法的平均复杂度分析是相对于输入的概率分布而言的,因此为了对算法进行平均复杂度分析,必须首先假设输入服从某种分布.

快速排序算法与桶排序算法的平均时间复杂度.

散列表检索和插入的平均时间复杂度.

4. 随机算法

随机算法,蒙特卡罗法和拉斯维加斯法,单侧错误和双侧错误.

随机快速排序算法及其平均时间复杂度.

多项式恒零测试随机算法及其错误概率.

素数测试随机算法及其错误概率.

13.2 习　　题

13.1 用下述加密算法把“XINGDONGZAIZIYE”译成密文,用 0~25 分别表示 A~Z,密文仍用字母表示.

(1) $E(i)=(i+3) \bmod 26$

(2) $E(i)=7i \bmod 26$

(3) $E(i)=(5i-2) \bmod 26$

13.2　用维吉利亚密码将“XINGDONGZAIZIYE”译成密文，每个字段含3个字母，密钥 $k=k_1k_2k_3$，$k_1=3$，$k_2=-2$，$k_3=7$.

13.3　设整数 a,b,m，其中 $m\geqslant 2$. 证明：线性同余变换

$$E(i)=(ai+b) \bmod m,\quad i=0,1,\cdots,m-1$$

是 $\{0,1,\cdots,m-1\}$ 上的双射函数当且仅当 a 与 m 互素.

13.4　写出13.1题中3个加密算法的解密算法，并将你在13.1题中得到的密文恢复成明文.

13.5　RSA 密码取 $p=5,q=7,n=35,\phi(n)=24,w=7$. 以00～25表示A～Z，每个字段是2位数字.

(1) 把 STOP 译成密文.

(2) 收到密文 32 14 32，把它译成明文.

13.6　对下述参数给出用线性同余法产生的伪随机数序列，并指出序列的周期：

(1) $m=16,a=7,c=1,x_0=0$

(2) $m=9,a=7,c=4,x_0=3$

(3) $m=15,a=3,c=0,x_0=1$

(4) $m=17,a=2,c=0,x_0=4$

(5) $m=17,a=5,c=0,x_0=1$

13.7　(1) 设计用(0,1)均匀分布伪随机数，产生服从下述分布律的伪随机数的算法：

X	0	1	2	3
p	0.10	0.35	0.05	0.50

(2) 分析算法的平均运行时间.

(3) 改进算法使得平均运行时间最少.

13.8　设计用(0,1)均匀分布伪随机数，产生服从几何分布的伪随机数的算法.

13.9　线性搜索算法如下：

```
Linear Search(A,x)              //数组 A[1..n],待查找对象 x
1. for i←1 to n do
2.     if A[i]=x then return i  //查找成功
3. return"no"                   //查找失败
```

设 A 的 n 个元素都不相同，x 已在 A 中的概率为 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$，并且当 x 在 A 中时，x 等于 A 的每一个元素的可能性相等. 试分析算法的平均时间复杂度.

13.10　设 A 的 n 个元素都不相同，证明下述算法产生的排列 $A[1],A[2],\cdots,A[n]$ 服从均匀分布：

```
Random Permute Array(A)         //数组 A[1..n]
1. for i←1 to n do
```

2. 产生$\{i,i+1,\cdots,n\}$上的均匀随机数 k

3. 交换 $A[i]$与 $A[k]$

这段程序能起到随机化输入,使其服从均匀分布的作用.比如,在快速排序算法的前面加上这段程序,就得到随机快速排序算法.

13.11 随机线性搜索算法是在执行线性搜索算法(题13.9)之前先对输入进行随机重排(题13.10),描述如下:

Random Linear Search(A,x) //数组 $A[1..n]$,待查找对象 x

1. Random Permute Array(A)
2. Linear Search(A,x)

假设 A 中有 $k(1\leqslant k\leqslant n)$个元素等于 x,试分析算法在调用 Linear Search(A,x)时,执行循环的次数的期望值.

13.12 某公司要招聘一名技术主管,有 n 位应聘者.招聘人员与他们一位一位地面谈,要求对每位应聘者在面谈后立即告诉对方是否录用.具体做法是,首先确定一个正整数 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$,然后对每位应聘者通过面谈打一个分数,打的分数都不相同.前 k 位都不录用,设前 k 位的最高得分为 m.从第 $k+1$ 位起,只要得分超过 m 就录用,不再考虑后面的人.如果 $n-k-1$ 位的得分都不超过 m,此时只剩下最后一位,不管他得多少分都录用.算法描述如下,其中 $score(i)$是第 i 位应聘者的得分.

On-Line Max(n,k)

1. $m\leftarrow-\infty$
2. for $i\leftarrow1$ to k do
3. if $score(i)>m$ then $m\leftarrow score(i)$
4. for $i\leftarrow k+1$ to $n-1$ do
5. if $score(i)>m$ then return i
6. return n

假设 n 位应聘者的排列服从均匀分布,

(1) 求恰好选中分数最高的概率 p,并分析 k 应如何取值.

(2) 求需要面谈的人数的期望值.

13.13 用散列函数 h 把 n 个不同的关键码散列到长度为 m 的表 T 中,假设 h 为简单均匀散列函数,求平均的冲突数.

13.14 设 p 是一个素数,$m\geqslant2$,记 $Z_p=\{0,1,\cdots,p-1\}$,$Z_p^*=\{1,2,\cdots,p-1\}$.对每一对$\langle a,b\rangle\in Z_p^*\times Z_p$,定义

$$\bar{h}_{a,b}(K)=(aK+b)\bmod p$$

$$h_{a,b}(K)=\bar{h}_{a,b}(K)\bmod m$$

其中 $K\in Z_p$.试证明:

(1) 对每一对$\langle a,b\rangle\in Z_p^*\times Z_p$,$\bar{h}_{a,b}$是 Z_p上的双射函数.

(2) 设$\langle a,b\rangle$服从 $Z_p^*\times Z_p$上的均匀分布,则对 Z_p中任意的 $K\neq L$,有

$$P\{h_{a,b}(K)=h_{a,b}(L)\}\leqslant\frac{1}{m}$$

$\{h_{a,b}\mid\langle a,b\rangle\in Z_p\times Z_p^*\}$称作**通用散列函数类**.

13.3 习题解答与分析

13.1 明文 XINGDONGZAIZIYE

23 8 13 6 3 14 13 6 25 0 8 25 8 24 4

(1) 加密算法 $E(i)=(i+3)\bmod 26$.

密文 0 11 16 9 6 17 16 9 2 3 11 2 11 1 7

ALQJGRQJCDLCLBH

(2) 加密算法 $E(i)=7i\bmod 26$

密文 5 4 13 16 21 20 13 16 19 0 4 19 4 12 2

FENQVUNQTAETEMC

(3) 加密算法 $E(i)=(5i-2)\bmod 26$

密文 9 12 11 2 13 16 11 2 19 24 12 19 12 14 18

JMLCNQLCTYMTMOS

13.2 加密算法 $E(m_1m_2m_3)=c_1c_2c_3$

其中 $c_i=(m_i+k_i)\bmod 26, i=1,2,3, k_1=3, k_2=-2, k_3=7$.

明文 XINGDONGZAIZIYE

23 8 13 　6 3 14 　13 6 25 　0 8 25 　8 24 4

密文 0 6 20 　9 1 21 　16 4 6 　3 6 6 　11 22 11

AGUJBVQEGDGGLWL

13.3 充分性. 设 a 与 m 互素,则 a 的模 m 逆 a^{-1} 存在. 令

$$D(j)=a^{-1}(j-b)\bmod m,\quad j=0,1,\cdots,25$$

则

$$\begin{aligned}D(E(i))&=a^{-1}((ai+b)\bmod m-b)\bmod m\\&=a^{-1}((ai+b)-b)\bmod m\\&=i,\qquad i=0,1,\cdots,25\\E(D(j))&=(a(a^{-1}(j-b)\bmod m)+b)\bmod m\\&=(aa^{-1}(j-b)+b)\bmod m\\&=j,\qquad j=0,1,\cdots,25\end{aligned}$$

得证 E 是双射, $D=E^{-1}$.

必要性. 用反证法,假设 a 与 m 不互素,则 $d=\gcd(a,m)>1$. 记 $a=da_1, m=dm_1$,于是

$$\begin{aligned}E(i+m_1)&=(a(i+m_1)+b)\bmod m\\&=(ai+am_1+b)\bmod m\\&=(ai+a_1m+b)\bmod m\\&=(ai+b)\bmod m\\&=E(i)\end{aligned}$$

而 $i+m_1\not\equiv i(\bmod m)$,与 E 是单射矛盾,故 a 与 m 互素.

13.4 (1) 加密算法 $E(i)=(i+3)\bmod 26$

解密算法 $D(i)=(i-3)\bmod 26$

密文　ALQJGRQJCDLCLBH

　　　0 11 16 9 6 17 16 9 2 3 11 2 11 1 7

明文　23 8 13 6 3 14 13 6 25 0 8 25 8 24 4

　　　XINGDONGZAIZIYE

(2) 加密算法 $E(i)=7i \bmod 26$

7 与 26 互素，$7^{-1}\equiv 15 \pmod{26}$，解密算法 $D(i)=15i \bmod 26$

密文　FENQVUNQTAETEMC

　　　5 4 13 16 21 20 13 16 19 0 4 19 4 12 2

明文　23 8 13 6 3 14 13 6 25 0 8 25 8 24 4

　　　XINGDONGZAIZIYE

(3) 加密算法 $E(i)=(5i-2) \bmod 26$

5 与 26 互素，$5^{-1}\equiv -5 \pmod{26}$，解密算法 $D(i)=-5(i+2) \bmod 26$

密文　9 12 11 2 13 16 11 2 19 24 12 19 12 14 18

　　　JMLCNQLCTYMTMOS

明文　23 8 13 6 3 14 13 6 25 0 8 25 8 24 4

　　　XINGDONGZAIZIYE

13.5　$p=5, q=7, n=pq=35, \phi(n)=4\times 6=24, w=7$.

(1) 明文 STOP 表成 18 19 14 15，7 的二进制表示是 111.

$18^2\equiv 9 \pmod{35}$，　$9^2\equiv 11 \pmod{35}$，　$18^7\equiv 18\times 9\times 11\equiv 32 \pmod{35}$

$19^2\equiv 11 \pmod{35}$，$11^2\equiv 16 \pmod{35}$，$19^7\equiv 19\times 11\times 16\equiv 19 \pmod{35}$

$14^2\equiv 21 \pmod{35}$，$21^2\equiv 21 \pmod{35}$，$14^7\equiv 14\times 21\times 21\equiv 14 \pmod{35}$

$15^2\equiv 15 \pmod{35}$，$15^7\equiv 15\times 15\times 15\equiv 15 \pmod{35}$

密文为：32 19 14 15

(2) 密文　32 14 32，$7^{-1}\equiv 7 \pmod{24}$，得 $d=7$.

$32^2\equiv (-3)^2\equiv 9 \pmod{35}$，　$9^2\equiv 11 \pmod{35}$

$32^7\equiv (-3)\times 9\times 11\equiv 18 \pmod{35}$

$14^2\equiv -14 \pmod{35}$，　　$(-14)^2\equiv -14 \pmod{35}$

$14^7\equiv 14\times(-14)\times(-14)\equiv 14 \pmod{35}$

明文为：18 14 18，即 SOS.

13.6　线性同余法 $x_n=(ax_{n-1}+c) \bmod m, n=1,2,\cdots$

(1) $m=16, a=7, c=1, x_0=0$

伪随机数序列：1,8,9,0,1,8,9,0,…　　周期：4

(2) $m=9, a=7, c=4, x_0=3$

伪随机数序列：7,8,6,1,2,0,4,5,3,7,8,…　　周期：9

(3) $m=15, a=3, c=0, x_0=1$

伪随机数序列：3,9,12,6,3,9,12,6,…　　周期：4

(4) $m=17, a=2, c=0, x_0=4$

伪随机数序列：8,16,15,13,9,1,2,4,8,16,…　　周期：8

(5) $m=17, a=5, c=0, x_0=1$

伪随机数序列：5,8,6,13,14,2,10,16,12,9,11,4,3,15,7,1,5,… 周期：16

13.7 (1)

算法 1：

1. 产生(0,1)均匀分布伪随机数 u
2. if $u \leqslant 0.1$ then $x \leftarrow 0$，计算结束
3. else if $u \leqslant 0.45$ then $x \leftarrow 1$，计算结束
4. else if $u \leqslant 0.5$ then $x \leftarrow 2$，计算结束
5. else $x \leftarrow 3$
6. return x

(2) 设产生伪随机数 u 所需的时间为 a，算法 1 执行步骤 2～5 中的步数为 N，算法 1 的运行时间为 $T=N+a+1$.

N 与 u 的关系如下：

u	(0,0.1]	(0.1,0.45]	(0.45,0.5]	(0.5,1]
N	1	2	3	4

故 N 的分布律为

N	1	2	3	4
p	0.1	0.35	0.05	0.5

于是，算法 1 的平均运行时间为

$$E(T)=a+1+E(N)=a+1+1\times0.1+2\times0.35+3\times0.05+4\times0.5=a+3.95$$

(3) 按概率从大到小重新排列 X 的取值

X	3	1	0	2
p	0.5	0.35	0.1	0.05

算法 2：

1. 产生(0,1)均匀分布伪随机数 u
2. if $u \leqslant 0.5$ then $x \leftarrow 3$，计算结束
3. else if $u \leqslant 0.85$ then $x \leftarrow 1$，计算结束
4. else if $u \leqslant 0.95$ then $x \leftarrow 0$，计算结束
5. else $x \leftarrow 2$
6. return x

类似地，算法 2 的平均运行时间为

$$E(T')=a+1+1\times0.5+2\times0.35+3\times0.1+4\times0.05=a+2.7$$

13.8 几何分布 $p_k=P\{X=k\}=q^{k-1}p, k=1,2,\cdots$

递推公式：

$$p_1 = p$$
$$p_{k+1} = qp_k, k=1,2,\cdots$$

算法

1. 产生(0,1)均匀分布伪随机数 u
2. $t \leftarrow p, F \leftarrow t, q \leftarrow 1-p, x \leftarrow 1$
3. while $u > F$
4. $\quad t \leftarrow t * q, F \leftarrow F + t, x \leftarrow x + 1$
5. return x

13.9 若 $x=A[i]$,则循环执行 i 次;若 x 不在 A 中,则执行完循环(n 次)后再加 1 步. 根据题设,$P\{x=A[i]\}=\frac{p}{n}, i=1,2,\cdots,n$;$x$ 不在 A 中的概率等于 $q=1-p$. 算法的平均运行时间为

$$E(T_n) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{p}{n} + q(n+1) = \left(\frac{1}{2}p + q\right)(n+1) = \left(1 - \frac{1}{2}p\right)(n+1)$$

13.10 记 $S=\{A[i] \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$,要证对每一个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$,经过 i 次循环后 $A[1..i]$ 为 S 中任意一个 i 个元素的子排列的概率等于 $\frac{(n-i)!}{n!}$.

当 $i=1$ 时,步骤 2 产生的随机数 k 等可能地为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的任意一个,故经过一次循环后,$A[1]$ 为 S 中的任意一个的概率等于 $\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{n!}$,即结论成立.

假设对 $i-1(2 \leqslant i \leqslant n)$ 结论成立,考虑经过 i 次循环. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_i$ 是 S 中的任意一个 i 个元素的子排列,记

B:经过 $i-1$ 次循环后 $A[1..i-1]$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}$

C:第 i 次循环中产生的随机数 k 使得 $A[k]=x_i$

于是,BC:i 次循环后 $A[1..i]$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_i$. 而由归纳假设,得

$$P(B) = \frac{(n-i+1)!}{n!}$$

从而

$$P(BC) = P(B)P(C|B) = \frac{(n-i+1)!}{n!} \cdot \frac{1}{n-i+1} = \frac{(n-i)!}{n!}$$

得证对 i 结论也成立.

因此,经过 n 次循环后,$A[1..n]$ 为 S 的任何排列的概率等于 $\frac{1}{n!}$,即 $A[1..n]$ 服从均匀分布.

13.11 执行 i 次循环 $\Leftrightarrow A[1..i-1]$ 中不含 x 且 $A[i]=x$. 这样的 $A[1..n]$ 有 $P(n-k,i-1) \cdot k \cdot (n-i)!$ 个. 于是,循环执行次数 T_n 的分布律为

$$P\{T_n = i\} = \frac{P(n-k,i-1) \cdot k \cdot (n-i)!}{n!}$$
$$= \frac{(n-k)!(n-i)!k}{(n-k-i+1)!n!} \qquad i = 1,2,\cdots,n-k+1$$

$$E(T_n) = \sum_{i=1}^{n-k+1} i \cdot \frac{(n-k)!(n-i)!k}{(n-k-i+1)!n!}$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{i=1}^{n-k+1} i\binom{n-i}{k-1} \qquad \text{令 } j=n-k+1-i$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{j=0}^{n-k}(n-k+1-j)\binom{k-1+j}{k-1}$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{k}}\left[(n-k+1)\sum_{j=0}^{n-k}\binom{k-1+j}{k-1}-\sum_{j=0}^{n-k} j\binom{k-1+j}{k-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{k}}\left[(n-k+1)\sum_{j=0}^{n-k}\binom{k-1+j}{k-1}-k\sum_{j=1}^{n-k}\binom{k-1+j}{k}\right]$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{k}}\left[(n-k+1)\sum_{l=k-1}^{n-1}\binom{l}{k-1}-k\sum_{l=k}^{n-1}\binom{l}{k}\right]$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{k}}\left[(n-k+1)\binom{n}{k}-k\binom{n}{k+1}\right] \qquad \text{(主教材 8.3.2 节(8))}$$

$$=n-k+1-\frac{k(n-k)}{k+1}$$

13.12 (1) 设 A_i：选中第 i 人且第 i 人是最高分，即第 i 人是最高分且前 $i-1$ 个人中的最高分在前 k 个人中，$i=k+1,k+2,\cdots,n$. 则

$$P(A_i)=\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{i-1}$$

故恰好选中最高分的概率为

$$p_k=\sum_{i=k+1}^{n} p(A_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}\frac{k}{i-1}=\frac{k}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}$$

考虑 $p_k\leqslant p_{k+1}$，即

$$\frac{k}{n}\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}\leqslant\frac{k+1}{n}\sum_{j=k+1}^{n-1}\frac{1}{j}$$

化简得

$$\sum_{j=k+1}^{n-1}\frac{1}{j}\geqslant 1$$

因此 $k_0=\min\left\{k\,\middle|\,\sum_{j=k+1}^{n-1}\frac{1}{j}<1\right\}$ 使 p_k 取到最大值.

注意到 $\sum_{j=k+1}^{n-1}\frac{1}{j}\approx\int_k^{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\frac{n-1}{k}$，由 $\ln\frac{n-1}{k}=1$，解得 $k_0\approx(n-1)\mathrm{e}^{-1}$.

例如，当 $n=20$ 时，$\sum_{j=7}^{19}\frac{1}{j}=1.10$，$\sum_{j=8}^{19}\frac{1}{j}=0.95$，$k_0=7$. 而 $(20-1)\mathrm{e}^{-1}=6.99$.

(2) 记 X：被选中人的序号.

$X=i \Leftrightarrow$ 第 i 人的分数是前 i 个人中最高的且前 $i-1$ 个人中的最高分在前 k 个人中，$i=k+1,k+2,\cdots,n-1$.

$X=n \Leftrightarrow$ 前 $n-1$ 个人中的最高分在前 k 个人中.

X 的分布律为

$$P\{X=i\}=\frac{k}{i(i-1)} \qquad i=k+1,k+2,\cdots,n-1$$

$$P\{X=n\}=\frac{k}{n-1}$$

面谈人数的平均值为

$$EX=\sum_{i=k+1}^{n-1} i\cdot\frac{k}{i(i-1)}+n\cdot\frac{k}{n-1}=k\left(1+\sum_{j=k}^{n-1}\frac{1}{j}\right)$$

13.13 令 $X_{ij}=\begin{cases}1 & h(K_i)=h(K_j) \\ 0 & \text{否则}\end{cases} \qquad 1\leqslant i<j\leqslant n$

$$P\{X_{ij}=1\}=\frac{1}{m}$$

冲突数 $M=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}X_{ij}$，平均冲突数为

$$E(M)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E(X_{ij})=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{m}$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)=\frac{n(n-1)}{2m}$$

13.14 (1) 因为 p 是素数，$1\leqslant a<p$，所以 a 的模 p 逆 a^{-1} 存在. 令

$$\bar{h}_{a,b}^{-1}(K)=a^{-1}(K-b)\bmod p \qquad \forall K\in Z_p$$

不难验证：$\forall K\in Z_p$，$\bar{h}_{a,b}^{-1}(\bar{h}_{a,b}(K))=K$，$\bar{h}_{a,b}(\bar{h}_{a,b}^{-1}(K))=K$，从而得证 $\bar{h}_{a,b}$ 是 Z_p 上的双射函数.

(2) 设 $K,L\in Z_p$ 且 $K\neq L$，不妨设 $(aK+b)\bmod p\geqslant(aL+b)\bmod p$. 又因为 $K\neq L$，故 $K-L$ 的模 p 逆 $(K-L)^{-1}$ 存在. 于是

$$\begin{aligned}
h_{a,b}(K)=h_{a,b}(L) &\Leftrightarrow \bar{h}_{a,b}(K)\equiv\bar{h}_{a,b}(L)\pmod m \\
&\Leftrightarrow (aK+b)\bmod p-(aL+b)\bmod p\equiv 0\pmod m \\
&\Leftrightarrow a(K-L)\bmod p\equiv 0\pmod m \qquad \text{两边同乘}(K-L)^{-1} \\
&\Leftrightarrow a \bmod p\equiv 0\pmod m \\
&\Leftrightarrow a\equiv 0\pmod m
\end{aligned}$$

而 a 服从 Z_p^* 上的均匀分布，得到

$$P\{h_{a,b}(K)=h_{a,b}(L)\}=\frac{\lfloor (p-1)/m\rfloor}{p-1}\leqslant\frac{1}{m}$$

第14章 代数系统

14.1 内容提要

1. 二元运算与一元运算

定义 14.1 设 S 为集合,函数 $f: S\times S\to S$ 称为 S 上的**二元运算**,简称为二元运算.这时也称 S 对 f **封闭**.

定义 14.2 设 S 为集合,函数 $f: S\to S$ 称为 S 上的**一元运算**,简称为一元运算.

2. 二元运算及一元运算的表示

算符:$\circ$, $*$, $\cdot$, $\oplus$, $\otimes$, Δ 等.

$$f(\langle x,y\rangle)=z\Leftrightarrow x\circ y=z$$
$$f(x)=y\Leftrightarrow \circ x=y$$

表示方法:

函数表达式——运算规则能够用函数表达式给出.

运算表——适于表示有穷集上的运算,运算表的格式如表 14.1 和表 14.2 所示.

表 14.1

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1\circ a_1$	$a_1\circ a_2$	$\cdots$	$a_1\circ a_n$
a_2	$a_2\circ a_1$	$a_2\circ a_2$	$\cdots$	$a_2\circ a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_n	$a_n\circ a_1$	$a_n\circ a_2$	$\cdots$	$a_n\circ a_n$

表 14.2

a_i	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
$\vdots$	$\vdots$
a_n	$\circ a_n$

3. 二元运算的性质——算律

设$\circ$为 S 上的二元运算,涉及一个运算的主要算律有:

(1) 交换律 对于任意的 $x,y\in S$ 有 $x\circ y=y\circ x$.

(2) 结合律 对于任意的 $x,y,z\in S$ 有 $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$.

(3) 幂等律 对于任意的 $x\in S$ 有 $x\circ x=x$.

(4) 消去律 对于任意元素 $x,y,z\in S,x\neq\theta$,都有

$$x\circ y=x\circ z\Rightarrow y=z,\ y\circ x=z\circ x\Rightarrow y=z$$

设$\circ$和 $*$ 为 S 上两个不同的二元运算,涉及两个不同运算的主要算律有:

(5) $\circ$运算对 $*$ 运算的分配律 对于任意的 $x,y,z\in S$ 有

$$(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)\text{和 } z\circ(x*y)=(z\circ x)*(z\circ y)$$

(6) 吸收律　如果$\circ$和$*$都可交换,并且对于任意的$x,y\in S$有

$$x\circ(x*y)=x \text{ 和 } x*(x\circ y)=x$$

4. 运算的特异元素(代数常数)——单位元、零元、可逆元及其逆元

定义 14.3　设$\circ$为S上的二元运算,则

(1) 如果存在e_l(或e_r)$\in S$,使得对任意$x\in S$都有

$$e_l\circ x=x \quad (\text{或 } x\circ e_r=x)$$

则称e_l(或e_r)是S中关于$\circ$运算的**左(或右)单位元**.若$e\in S$关于$\circ$运算既是左单位元又是右单位元,则称e为S上关于$\circ$运算的**单位元**.单位元也叫做**幺元**.

(2) 如果存在θ_l(或θ_r)$\in S$,使得对任意$x\in S$都有

$$\theta_l\circ x=\theta_l \quad (\text{或 } x\circ\theta_r=\theta_r)$$

则称θ_l(或θ_r)是S中关于$\circ$运算的**左(或右)零元**.若$\theta\in S$关于$\circ$运算既是左零元又是右零元,则称θ为S上关于$\circ$运算的**零元**.

(3) 令e为S中关于运算$\circ$的单位元.对于$x\in S$,如果存在y_l(或y_r)$\in S$,使得

$$y_l\circ x=e \quad (\text{或 } x\circ y_r=e)$$

则称y_l(或y_r)是x关于$\circ$运算的**左逆元(或右逆元)**.若$y\in S$既是x的左逆元又是x的右逆元,则称y为x的**逆元**.如果x的逆元存在,就称x是**可逆**的.

唯一性定理:

定理 14.1　设$\circ$为S上的二元运算,e_l(或θ_l)和e_r(或θ_r)分别为S中关于$\circ$运算的左和右单位元(或零元),则$e_l=e_r=e$(或$\theta_l=\theta_r=\theta$)为S上关于$\circ$运算的唯一的单位元(或零元).

定理 14.2　设$\circ$为S上可结合的二元运算,e为该运算的单位元,对于$x\in S$如果存在左逆元y_l和右逆元y_r,则有$y_l=y_r=y$,且y是x关于$\circ$运算的唯一的逆元.

由于逆元的唯一性,通常将x的逆元记作x^{-1}.

5. 代数系统

定义 14.4　非空集合S和S上k个一元或二元运算$f_1,f_2,\cdots,f_k$组成的系统称为一个**代数系统**,简称**代数**,记做$\langle S,f_1,f_2,\cdots,f_k\rangle$.

代数系统的分类:

同类型的代数系统　两个代数系统中运算的个数相同,对应运算的元数相同,且代数常数的个数也相同.

同种的代数系统　两个同类型的代数系统对应的运算所规定的运算性质也相同.

6. 子代数系统与积代数系统

子代数定义　设$V=\langle S,f_1,f_2,\cdots,f_k\rangle$是代数系统,$B$是$S$的非空子集,如果$B$对$f_1,f_2,\cdots,f_k$都是封闭的,且$B$和$S$含有相同的代数常数,则称$\langle B,f_1,f_2,\cdots,f_k\rangle$是$V$的**子代数系统**,简称**子代数**.如果$B=S$,则称$B$是$V$的**平凡子代数**;如果$B\subset S$,则称子代数$B$为$V$的**真子代数**.

子代数性质:

对任何代数系统V,它的子代数一定存在.

子代数与原来的代数系统是同种的代数系统.

积代数定义　设$V_1=\langle A,\circ\rangle$和$V_2=\langle B,*\rangle$是同类型的代数系统,$\circ$和$*$为二元运算,在集合$A\times B$上如下定义二元运算$\cdot$,$\forall\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle\in A\times B$,有

$$\langle a_1, b_1\rangle \cdot \langle a_2, b_2\rangle = \langle a_1 \circ a_2, b_1 * b_2\rangle$$

称 $V=\langle A\times B, \cdot\rangle$ 为 V_1 与 V_2 的**积代数**,记作 $V_1\times V_2$. 这时也称 V_1 和 V_2 为 V 的**因子代数**.

积代数性质:

积代数与原来的代数系统是同类型的.

积代数可以保持原来代数系统中的交换律、结合律、幂等律、分配律和吸收律等,不一定保持消去律.

积代数也可以保持特异元素. 如果 e_1(或 θ_1) 和 e_2(或 θ_2) 分别为因子代数 V_1 与 V_2 中对应运算的单位元,则 $\langle e_1, e_2\rangle$(或 $\langle\theta_1, \theta_2\rangle$) 也是积代数中关于对应运算的单位元 (或零元). 对于 V_1 和 V_2 中可逆的元素 a 和 b, $\langle a^{-1}, b^{-1}\rangle$ 在积代数 $V_1\times V_2$ 中是 $\langle a, b\rangle$ 的逆元.

7. 代数系统的同态与同构

同态定义 设 $V_1=\langle A, \circ\rangle$ 和 $V_2=\langle B, *\rangle$ 是同类型的代数系统, $f: V_1\to V_2$, 且 $\forall x, y\in A$ 有

$$f(x\circ y)=f(x)*f(y)$$

则称 f 是 V_1 到 V_2 的**同态映射**,简称**同态**.

同态的分类:

同态映射如果是单射,则称为**单同态**;

如果是满射,则称为**满同态**,这时称 V_2 是 V_1 的**同态像**,记作 $V_1\sim V_2$;

如果是双射,则称为**同构**,也称代数系统 V_1 同构于 V_2,记作 $V_1\cong V_2$.

对于代数系统 V,它到自身的同态称为**自同态**.

类似地可以定义**单自同态**、**满自同态**和**自同构**.

同态的性质:

满同态映射 f 可以保持运算的交换律、结合律、幂等律、分配律和吸收律,不一定保持消去律.

满同态映射 f 能保持单位元、零元、可逆元素及其逆元,即:

$$f(e_1)=e_2, \quad f(\theta_1)=\theta_2, \quad f(x^{-1})=f(x)^{-1}$$

8. 半群与独异点

定义:

(1) 设 $V=\langle S, \circ\rangle$ 是代数系统, $\circ$ 为二元运算,如果 $\circ$ 运算是可结合的,则称 V 为**半群**.

(2) 设 $V=\langle S, \circ\rangle$ 是半群,若 $e\in S$ 是关于 $\circ$ 运算的单位元,则称 V 是**含幺半群**,也叫做**独异点**,记作 $V=\langle S, \circ, e\rangle$.

元素的幂:

在半群 $\langle S, \circ\rangle$ 中, $\forall x\in S$,规定: $x^1=x$, $x^{n+1}=x^n\circ x$, $n\in \mathbf{Z}^+$.

在独异点 $\langle S, \circ, e\rangle$ 中, $\forall x\in S$,规定: $x^0=e$, $x^{n+1}=x^n\circ x$, $n\in \mathbf{N}$.

幂运算规则

$$x^n\circ x^m=x^{n+m}, \quad (x^n)^m=x^{nm}, \quad m, n\in \mathbf{Z}^+ \text{(注:在独异点中 } m, n\in \mathbf{N}\text{)}$$

子半群与子独异点 半群与独异点的子代数.

判定方法:

设 $V=\langle S, \circ\rangle$ 是半群, $T\subseteq S$, T 非空,如果 T 对 V 中的 $\circ$ 运算封闭,则 $\langle T, \circ\rangle$ 是 V 的子半群.

设 $V=\langle S,\circ,e\rangle$ 是独异点，$T\subseteq S$，T 非空，如果 T 对 V 中的$\circ$运算封闭，且 $e\in T$，那么 $\langle T,\circ,e\rangle$ 构成 V 的子独异点.

半群与独异点的直积　半群与独异点的积代数.

半群与独异点的同态：

(1) 设 $V_1=\langle S_1,\circ\rangle$，$V_2=\langle S_2,*\rangle$ 是半群，$f: S_1\to S_2$. 若对任意的 $x,y\in S_1$，有

$$f(x\circ y)=f(x)*f(y)$$

则称 f 为半群 V_1 到 V_2 的同态映射，简称同态.

(2) 设 $V_1=\langle S_1,\circ,e_1\rangle$，$V_2=\langle S_2,*,e_2\rangle$ 是独异点，$f: S_1\to S_2$. 若对任意的 $x,y\in S_1$，有

$$f(x\circ y)=f(x)*f(y) \text{ 且 } f(e_1)=e_2$$

则称 f 为独异点 V_1 到 V_2 的同态映射，简称同态.

9. 群的定义及性质

群的定义　设 $\langle G,\circ\rangle$ 是代数系统，$\circ$为二元运算. 如果$\circ$运算是可结合的，存在单位元 $e\in G$，并且对 G 中的任何元素 x 都有 $x^{-1}\in G$，则称 G 为**群**.

若群 G 是有穷集，则称 G 是**有限群**，否则称为**无限群**. 群 G 的元素数称为群 G 的**阶**，有限群 G 的阶记作 $|G|$.

只含单位元的群称为**平凡群**.

若群 G 中的二元运算是可交换的，则称 G 为**交换群**或**阿贝尔(Abel)群**.

重要群的实例：

整数、有理数、实数加群，模 n 加群，Klein 四元群.

幂运算　设 G 是群，$a\in G$，$n\in \mathbf{Z}$，则 a 的 $\boldsymbol{n}$ **次幂**定义如下：

$$a^n=\begin{cases} e & n=0 \\ a^{n-1}a & n>0 \\ (a^{-1})^m & n<0,\quad n=-m \end{cases}$$

元素的阶　设 G 是群，$a\in G$，使得等式 $a^k=e$ 成立的最小正整数 k 称为 a 的**阶**，记作 $|a|=k$，这时称 a 为 $\boldsymbol{k}$ **阶元**. 若不存在这样的正整数 k，则称 a 为**无限阶元**.

群的性质：

定理 14.3　设 G 为群，$n,m\in\mathbf{Z}$，则 G 中的幂运算满足：

(1) $\forall a\in G,(a^{-1})^{-1}=a$

(2) $\forall a,b\in G,(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$

(3) $\forall a\in G,a^na^m=a^{n+m}$

(4) $\forall a\in G,(a^n)^m=a^{nm}$

(5) 若 G 为交换群，则 $(ab)^n=a^nb^n$

定理 14.4　G 为群，$\forall a,b\in G$，方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 在 G 中有解且仅有唯一解.

定理 14.5　G 为群，则 G 中适合消去律，即对任意 $a,b,c\in G$，有

(1) 若 $ab=ac$，则 $b=c$.

(2) 若 $ba=ca$，则 $b=c$.

定理 14.6　G 为群，$a\in G$ 且 $|a|=r$. 设 k 是整数，则

(1) $a^k=e$ 当且仅当 $r\mid k$

(2) $|a^{-1}|=|a|$

10. 子群

定义 设G是群,H是G的非空子集,如果H关于G中的运算构成群,则称H是G的**子群**,记作$H \leqslant G$.若H是G的**子群**,且$H \subset G$,则称H是G的**真子群**,记作$H < G$.

子群判定定理:

定理 14.7(判定定理一) 设G为群,H是G的非空子集,则H是G的子群当且仅当

(1) $\forall a,b \in H$有$ab \in H$

(2) $\forall a \in H$有$a^{-1} \in H$

定理 14.8(判定定理二) 设G为群,H是G的非空子集.H是G的子群当且仅当$\forall a,b \in H$有$ab^{-1} \in H$.

重要的子群:

设G为群,$a \in G$,令$H = \{a^k \mid k \in Z\}$,则H是G的子群,称为**由*a*生成的子群**,记作$\langle a \rangle$.

设G为群,令$C = \{a \mid a \in G \land \forall x \in G(ax = xa)\}$,则$C$是$G$的子群,称为$G$的**中心**.

子群格 设G为群,令$L(G) = \{H \mid H$是G的子群$\}$,则偏序集$\langle L(G), \subseteq \rangle$称为$G$的子群格.

11. 群的同态

定义 设G_1、G_2是群,$f: G_1 \to G_2$,若$\forall a,b \in G_1$都有$f(ab) = f(a)f(b)$,则称f是群G_1到G_2的同态映射,简称同态.

12. 循环群

定义 设G是群,若存在$a \in G$,使得$G = \{a^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$,则称$G$是**循环群**,记作$G = \langle a \rangle$,称$a$为$G$的**生成元**.

分类:

若a是n阶元,则$G = \{a^0 = e, a^1, a^2, \cdots, a^{n-1}\}$,那么$|G| = n$,称$G$为***n*阶循环群**.

若a是无限阶元,则$G = \{a^0 = e, a^{\pm 1}, a^{\pm 2}, \cdots\}$,称$G$为**无限循环群**.

循环群的生成元:

定理 14.9 设$G = \langle a \rangle$是循环群.

(1) 若G是无限循环群,则G只有两个生成元,即a和a^{-1}.

(2) 若G是n阶循环群,则G含有$\phi(n)$个生成元.这里的$\phi(n)$是欧拉函数(见9.1节),对于任何小于n且与n互素的自然数r,a^r是G的生成元.

定理 14.10

(1) 设$G = \langle a \rangle$是循环群,则G的子群仍是循环群.

(2) 若$G = \langle a \rangle$是无限循环群,则G的子群除$\{e\}$以外都是无限循环群.对于任何自然数r,$\langle a^r \rangle$都是G的一个子群,且对于不同的r,所得到的子群$\langle a^r \rangle$也不同.

(3) 若$G = \langle a \rangle$是n阶循环群,则对n的每个正因子d,G恰好含有一个d阶子群,就是$\langle a^{\frac{n}{d}} \rangle$.

13. *n*元置换群

n*元置换的定义** 设$S = \{1, 2, \cdots, n\}$,S上的任何双射函数$\sigma: S \to S$称为S上的n*元置换**.

***n*元置换的表示法:**

置换符号表示

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

不交的轮换表示与对换表示.

轮换与对换定义 设 σ 是 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的 n 元置换. 若 $\sigma(i_1)=i_2,\sigma(i_2)=i_3,\cdots,\sigma(i_{k-1})=i_k,\sigma(i_k)=i_1$,且保持 S 中的其他元素不变,则称 σ 为 S 上的 **k 阶轮换**,记作 $(i_1i_2\cdots i_k)$. 若 $k=2$,称 σ 为 S 上的**对换**.

任何 n 元置换都可以表示成不交的轮换之积,且表法是唯一的.

任何 n 元置换都可以表示成对换之积. 表法不唯一,但是含有对换个数的奇偶性不变.

奇置换与偶置换 在 n 元置换的对换表示中含有偶数个对换,则称这个 n 元置换为偶置换,否则称为奇置换.

置换的乘法 设 σ,τ 是 n 元置换,σ 和 τ 的复合 $\sigma\circ\tau$ 也是 n 元置换,称为 σ 与 τ 的**乘积**,记作 $\sigma\tau$.

置换群 所有的 n 元置换的集合 S_n 关于置换的乘法构成群,称为 **n 元对称群**. n 元对称群的子群称为 **n 元置换群**.

14. 环与域

环的定义 设 $\langle R,+,\cdot\rangle$ 是代数系统,$+$ 和 $\cdot$ 是二元运算. 如果满足以下条件:

(1) $\langle R,+\rangle$ 构成交换群

(2) $\langle R,\cdot\rangle$ 构成半群

(3) $\cdot$ 运算关于 $+$ 运算适合分配律

则称 $\langle R,+,\cdot\rangle$ 是一个**环**.

相关术语:

称 $+$ 运算为环中的加法,$\cdot$ 运算为环中的乘法. 环中加法单位元记作 0,乘法单位元(如果存在)记作 1. 对任何元素 x,称 x 的加法逆元为**负元**,记作 $-x$. 若 x 存在乘法逆元,则称之为逆元,记作 x^{-1}. 为了使得表达式更为简洁,在环中经常省略乘法算符,而把 $a\cdot b$ 记作 ab.

环的运算性质:

定理 14.11 设 $\langle R,+,\cdot\rangle$ 是环,则

(1) $\forall a\in R, a0=0a=0$

(2) $\forall a,b\in R, (-a)b=a(-b)=-ab$

(3) $\forall a,b,c\in R, a(b-c)=ab-ac, (b-c)a=ba-ca$

(4) $\forall a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_m\in R$ (其中 $n,m\geqslant 2$)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_ib_j$$

子环定义及判定:

定义 设 R 是环,S 是 R 的非空子集. S 关于环 R 的加法和乘法也构成环,称为 R 的**子环**. 若 S 是 R 的子环,且 $S\subset R$,则称 S 是 R 的**真子环**.

判定定理:

定理 14.12 设 R 是环,S 是 R 的非空子集,若

(1) $\forall a,b\in S,\quad a-b\in S$

(2) $\forall a,b\in S$, $ab\in S$

则 S 是 R 的子环.

环同态 设 R_1 和 R_2 是环. $f: R_1\rightarrow R_2$,若对于任意的 $x,y\in R_1$ 有

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad f(xy)=f(x)f(y)$$

成立,则称 f 是环 R_1 到 R_2 的同态映射,简称环同态.

特殊的环:

设 $\langle R,+,\cdot\rangle$ 是环,

(1) 若环中乘法 $\cdot$ 适合交换律,则称 R 是**交换环**.

(2) 若环中乘法 $\cdot$ 存在单位元,则称 R 是**含幺环**.

(3) 若 $\forall a,b\in R, ab=0\Rightarrow a=0\vee b=0$,则称 R 是**无零因子环**.

(4) 若 R 既是交换环、含幺环,也是无零因子环,则称 R 是**整环**.

(5) 设 R 是整环,且 R 中至少含有两个元素. 若 $\forall a\in R^*$,其中 $R^*=R-\{0\}$,都有 $a^{-1}\in R$,则称 R 是**域**.

15. 格的定义与性质

两个等价定义:

(1) 设 $\langle S,\preccurlyeq\rangle$ 是偏序集,如果 $\forall x,y\in S,\{x,y\}$ 都有最小上界和最大下界,则称 S 关于偏序 $\preccurlyeq$ 构成一个**格**. $x\vee y$ 和 $x\wedge y$ 分别表示 x 与 y 的最小上界和最大下界.

(2) 设 $\langle S,*,\circ\rangle$ 是代数系统,$*$ 和 $\circ$ 是二元运算,如果 $*$ 和 $\circ$ 运算满足交换律、结合律和吸收律,则 $\langle S,*,\circ\rangle$ 构成格.

对偶原理:

设 f 是含有格中元素以及符号 $=$、$\preccurlyeq$、$\succcurlyeq$、$\vee$ 和 $\wedge$ 的命题,令 f^* 是将 f 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$、$\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$、$\vee$ 替换成 $\wedge$、$\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题,称 f^* 为 f 的**对偶命题**.

格的对偶原理 设 f 是含有格中元素以及符号 $=$、$\preccurlyeq$、$\succcurlyeq$、$\vee$ 和 $\wedge$ 等的命题,若 f 对一切格为真,则 f 的对偶命题 f^* 也对一切格为真.

格中的算律:

定理 14.13 设 $\langle L,\preccurlyeq\rangle$ 是格,则运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 适合交换律、结合律、幂等律和吸收律,即

(1) $\forall a,b\in L$ 有 $a\vee b=b\vee a$ 和 $a\wedge b=b\wedge a$

(2) $\forall a,b,c\in L$ 有 $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$ 和 $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$

(3) $\forall a\in L$ 有 $a\vee a=a$ 和 $a\wedge a=a$

(4) $\forall a,b\in L$ 有 $a\vee(a\wedge b)=a$ 和 $a\wedge(a\vee b)=a$

16. 子格与格同态

子格 设 $\langle L,\wedge,\vee\rangle$ 是格,S 是 L 的非空子集,若 S 关于 L 中的运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 仍构成格,则称 S 是 L 的子格.

格的同态 设 L_1 和 L_2 是格,$f: L_1\rightarrow L_2$,若 $\forall a,b\in L_1$ 有

$$f(a\wedge b)=f(a)\wedge f(b),\quad f(a\vee b)=f(a)\vee f(b)$$

成立,则称 f 为格 L_1 到 L_2 的同态映射,简称格同态.

17. 特殊的格

分配格 设 $\langle L,\wedge,\vee\rangle$ 是格,若 $\forall a,b,c\in L$,有

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

则称 L 为分配格.

分配格的判定定理:

定理 14.14 设 L 是格,则 L 是分配格当且仅当 L 不含有与钻石格或五角格(见主教材14.3节)同构的子格.

定理 14.15 格 L 是分配格当且仅当 $\forall a,b,c \in L$ 有 $a \wedge b = a \wedge c$ 且 $a \vee b = a \vee c \Rightarrow b = c$.

有界格 设 L 是格,若存在 $a \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $a \preccurlyeq x$,则称 a 为 L 的全下界;若存在 $b \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $x \preccurlyeq b$,则称 b 为 L 的全上界. 若 L 存在全下界和全上界,则称 L 为**有界格**,有界格 L 记为 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$,其中 0 与 1 分别表示全下界与全上界.

有补格 设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是有界格,$a \in L$,若存在 $b \in L$ 使得 $a \wedge b = 0$ 和 $a \vee b = 1$ 成立,则称 b 是 a 的**补元**. 设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ 是有界格,若 L 中所有元素都有补元存在,则称 L 为有补格.

18. 布尔代数

布尔格(或布尔代数)的等价定义:

有补分配格

设 $\langle B, *, \circ\rangle$ 是代数系统,$*$ 和 $\circ$ 是二元运算. 若 $*$ 和 $\circ$ 运算满足:

(1) 交换律,即 $\forall a,b \in B$,有: $a * b = b * a$, $a \circ b = b \circ a$

(2) 分配律,即 $\forall a,b,c \in B$,有: $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$, $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$

(3) 同一律,即存在 $0,1 \in B$,使得 $\forall a \in B$,有: $a * 1 = a$, $a \circ 0 = a$

(4) 补元律,即 $\forall a \in B$,存在 $a' \in B$,使得 $a * a' = 0$, $a \circ a' = 1$

则称 $\langle B, *, \circ\rangle$ 是一个布尔代数.

在布尔代数中,每个元素存在唯一的补元,因此求补是布尔代数中的一元运算. 可将布尔代数标记为 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$.

布尔代数的性质:

定理 14.16 设 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ 是布尔代数,则

(1) $\forall a \in B$, $(a')' = a$;

(2) $\forall a,b \in B$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$, $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ (德摩根律).

布尔代数的同态:

设 $\langle B_1, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$ 和 $\langle B_2, \cap, \cup, -, \theta, E\rangle$ 是两个布尔代数. 这里的 $\cap, \cup, -$ 泛指布尔代数 B_2 中的求最大下界,最小上界和补元的运算. θ 和 E 分别是 B_2 的全下界和全上界. $f: B_1 \to B_2$. 如果对于任意的 $a,b \in B_1$ 有

$$f(a \vee b) = f(a) \cup f(b), \quad f(a \wedge b) = f(a) \cap f(b), \quad f(a') = -f(a)$$

成立,则称 f 是布尔代数 B_1 到 B_2 的**同态映射**.

有限布尔代数的结构:

任何有限布尔代数都与某个幂集格同构. 因此,任何有限布尔代数的元素个数都是 2^n,其中 n 是某个自然数.

14.2 习 题

14.1 (1) 设 S 为3元集,S 上可以定义多少个不同的二元运算和一元运算? 其中有多少个二元运算是可交换的? 有多少个二元运算是幂等的? 有多少个二元运算既不是可交

换的又不是幂等的？

(2) 如果 S 为 n 元集合，则上述问题的结果是什么？

14.2　以下集合和运算是否构成代数系统？如果构成，说明该系统是否满足交换律、结合律？求出该运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元.

(1) $P(B)$关于对称差运算$\oplus$，其中 $P(B)$为幂集.

(2) 设 n 为给定正整数，$n\mathbf{Z}$ 关于普通乘法运算.

(3) $A=\{a,b,c\}$，$*$ 运算定义如表 14.3 所示.

表　14.3

$*$	a	b	c
a	b	b	b
b	b	b	b
c	b	b	a

14.3　确定以下各小题的集合关于给定运算是否封闭，如果是，说明相关运算所具有的性质（指交换律、结合律、幂等律、消去律、分配律、吸收律）和特异元素（单位元、零元、逆元）.

(1) $A=\mathbf{Z}$，$x\circ y=x+y-2xy$，$\forall x,y\in A$.

(2) $A=\mathbf{R}$，$x\circ y=|x-y|$，$\forall x,y\in A$.

(3) $A=P(\{a,b\})$，运算为集合的交.

(4) A 为 n 阶实可逆矩阵的集合，两个运算分别为矩阵加法和乘法.

14.4　以下集合和运算是否构成代数系统？如果构成，说明该系统是否满足交换律、结合律？求出该运算的单位元、零元和所有可逆元素的逆元.

(1) 有理数集 $\mathbf{Q}$，$x*y=(x+y)/2$.

(2) 自然数集 $\mathbf{N}$，$x*y=2^{xy}$.

(3) 正整数集，$x*y=\gcd(x,y)$，即求 x 与 y 的最大公约数.

(4) S^S，其中 S 为任意非空集合，运算为函数合成.

14.5　判断下列命题的真假.

(1) $A=\{x|x\in\mathbf{N}$ 且 $\gcd(x,5)=1\}$，则$\langle A,+\rangle$构成代数系统，$+$为普通加法.

(2) $\forall x,y\in\mathbf{R}$，$x*y=|x-y|$，则 0 为$\langle\mathbf{R},*\rangle$的单位元.

(3) $\forall x,y\in\mathbf{R}$，$x*y=x+y+xy$，则 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^{-1}=-x/(1+x)$.

(4) $A=\{1,2,\cdots,10\}$，$\forall x,y\in A$，$x*y=\gcd(x,y)$，则$\langle A,*\rangle$是半群.

(5) 任何代数系统都存在子代数.

(6) Klein 四元群的同态像一定是 Abel 群.

14.6　设 $A=\{1,2\}$，B 是 A 上的等价关系的集合.

(1) 列出 B 的元素.

(2) 给出代数系统 $V=\langle B,\cap\rangle$的运算表.

(3) 求出 V 的单位元、零元和所有可逆元素的逆元.

(4) 说明 V 是否为半群、独异点和群.

14.7　设集合 $A=\{a,b,c,d\}$上的$\circ$运算如表 14.4 所示.

(1) 说明运算是否可结合？为什么？

(2) 求单位元与零元.

表　14.4

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	d
c	c	d	a	d
d	d	d	d	d

14.8　设 $A=\{a,b,c\}$，构造 A 上的二元运算 $*$ 使得 $a*b=c$，$c*b=b$，且 $*$ 运算是幂等的、可交换的，给出关于 $*$ 运算的一个运算表，说明它是否可结合，为什么？

14.9　设 $A=\{a,b,c\}$，$\circ$是 A 上的二元运算，在 $V=\langle A,\circ\rangle$的运算表中，除了 $a\circ b=a$ 以外，其余运算结果都等于 b. 试给出 $V=\langle A,\circ\rangle$的两个非恒等映射的自同态.

14.10 设 $A=\{a,b,c\}$，$\circ$为 A 上的二元运算，且 $\forall x,y\in A, x\circ y=c$.

(1) 找出 A 上所有的双射函数.

(2) 说明这些函数是否为 $\langle A,\circ\rangle$ 的自同构，为什么？

14.11 证明定理14.5：设 G 为群，则 G 中适合消去律，即对任意 $a,b,c\in G$ 有

(1) 若 $ab=ac$，则 $b=c$.

(2) 若 $ba=ca$，则 $b=c$.

14.12 设 G 为群，$x,y\in G, x\neq e, |y|=2$，且 $yxy^{-1}=x^2$，求 $|x|$.

14.13 若群 G 中只有一个2阶元，则这个2阶元一定与 G 中所有元素可交换.

14.14 设 G 是 n 阶非交换群，$n\geqslant 3$，证明 G 中存在非单位元 a 与 b，$a\neq b$，且 $ab=ba$.

14.15 设 G 为群，$H\leqslant G$，证明如果 $x\in G$ 且 $xH=\{xh\mid h\in H\}$ 是 G 的子群，则 $x\in H$.

14.16 设 G 含有以下8个元素：

$$\pm\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \pm\begin{bmatrix}\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}\end{bmatrix},\quad \pm\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\quad \pm\begin{bmatrix}0&\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}$$

找出 G 的全部子群，并画出 G 的子群格.

14.17 设群 $G=\langle M_2(\mathbf{R}),+\rangle$，$H=\{\mathbf{A}\mid \mathbf{A}\in M_2(\mathbf{R})$，且 $\mathbf{A}=\mathbf{A}'\}$，其中 $\mathbf{A}'$ 表示 $\mathbf{A}$ 的转置，证明 H 是 G 的子群.

14.18 设 G 为群，$a\in G$. 令 $f: G\to G, f(x)=axa^{-1}, \forall x\in G$，证明 f 是 G 的自同构.

14.19 设 G 与 G' 都是群，f 是群 G 到 G' 的同态映射，$a\in G$.

(1) 证明若 a 的阶是有限的，则 $f(a)$ 的阶也是有限的，且 $|f(a)|$ 整除 $|a|$.

(2) 如果 $f(a)$ 的阶是有限的，那么 a 的阶一定是有限的吗？证明你的结论.

14.20 设 f 是群 G_1 到 G_2 的同态映射，H 是 G_1 的子群，证明 $f(H)$ 是 G_2 的子群.

14.21 如果 G 为非Abel群，证明 G 的所有自同构构成的群 Aut$G$ 至少含有2个元素.

14.22 求循环群 $\langle Z_{16},\oplus\rangle$ 的所有的生成元和子群.

14.23 设 m 整除 n，证明 n 阶循环群 $G=\langle a\rangle$ 中的方程 $x^m=e$ 恰有 m 个解.

14.24 设多项式 $f=(x_1+x_2)(x_3+x_4)$，找出使得 f 保持不变的所有下标的置换，这些置换是否构成 S_4 的子群？

14.25 证明在 S_n 中恰含有 k 个轮换的 n 元置换个数是第一类 Stirling 数 $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$.

14.26 设 $\langle G,+\rangle$ 是 Abel 群，End$G$ 是 G 的所有自同态的集合，$\forall f,g\in$ End$G$ 定义$+$和$\circ$运算：$\forall a\in G$，

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a)\qquad (f\circ g)(a)=g(f(a))$$

证明 End$G$ 关于$+$和$\circ$构成一个环.

14.27 R 为环，$a\in R$，$R_1=\{x\mid x\in R, xa=0\}$，证明 R_1 是 R 的子环.

14.28 证明有理数域的自同构只有恒等自同构.

14.29 若环 R 适合：$\forall a\in R, a^2=a$，证明：

(1) $\forall a\in R, a+a=0$ (2) R 是交换环

14.30 R 为含幺环，$a,b\in R$，且 $a^{-1},b^{-1}\in R$，证明：$(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

14.31 判断下述命题的真假.

(1) $\{1/2,1,2\}$ 对于普通乘法构成群.

(2) 整环的积代数不一定是整环.

(3) 2^n元格都是布尔格.

(4) 在有补格中,$\forall a \in L$,求 a 的补是 L 的一元运算.

14.32　设 $G=\langle Z_{18},\oplus\rangle$是模 18 的整数加群.

(1) 写出 G 的所有子群.

(2) 画出子群格$\langle L(G),\subseteq\rangle$的哈斯图.

(3) 说明该格是否为分配格、有补格及布尔代数.

14.33　设 $A=\{1,2,5,10,11,22,55,110\}$,$A$ 关于整除关系构成偏序集. 画出该偏序集的哈斯图. 说明该偏序集构成哪一种格?

14.34　设 $G=\langle Z_5,\oplus\rangle$.

(1) 给出 G 的自同构群 Aut$G$ 的运算表.

(2) 画出 Aut$G$ 的子群格 L 的哈斯图.

(3) 说明这个格是否为分配格、有补格、布尔格.

14.35　设 $A=\{2,3,\cdots,15\}$,$\preccurlyeq$为 A 上的偏序,$\phi(n)$是欧拉函数,$\forall x,y\in A$,

$$x\preccurlyeq y \Leftrightarrow \phi(x)<\phi(y)\text{或}(\phi(x)=\phi(y)\text{且 }x\leqslant y)$$

(1) 画出$\langle A,\preccurlyeq\rangle$的哈斯图.

(2) $\langle A,\preccurlyeq\rangle$是否为格? 如果是,说明这个格是否为分配格、有补格和布尔格.

14.36　设 $A_t=\{x\,|\,x\in \mathbf{R}\text{ 且 }K_t\leqslant x\leqslant t+1\}$,其中 $K_0=K_2=0$,$K_1=K_3=-1$,$K_4=-2$. 令 $S=\{A_t\,|\ t=0,1,2,3,4\}$.

(1) 画出偏序集$\langle S,\subseteq\rangle$的哈斯图,求它的极大、极小、最大、最小元.

(2) 该偏序集构成什么格?

14.37　设格 $L=\langle \mathbf{Z}^+,\vee,\wedge\rangle$,其中 $\wedge$,$\vee$ 分别为求两个数的最小公倍数和最大公约数的运算. 判断下列集合是否为 L 的子格?

(1) $A=\{1,2,3,9,12,72\}$　(2) $B=\{1,2,3,12,18\}$　(3) $C=\{5,5^2,5^3,\cdots,5^m\}$

14.38　在同构的意义下给出全部 5 元格的图形,并指出哪些是分配格、有界格、有补格及布尔代数.

14.39　求图 14.1 中格 L 的所有子格.

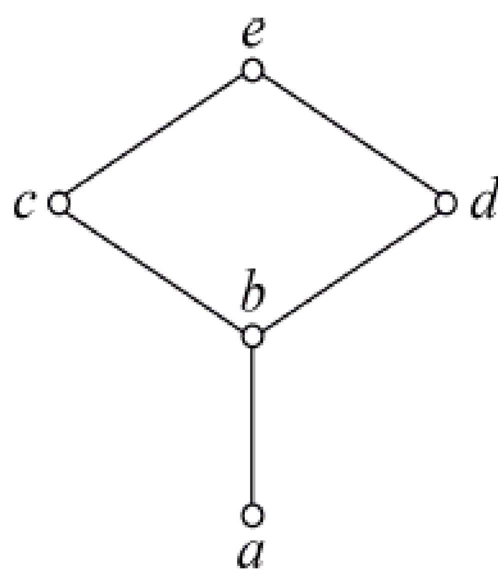


图　14.1

14.40　证明定理 14.13 (3)、(4)(见主教材 374 页),即证明格 L 中运算 $\wedge$ 和 $\vee$ 适合幂等律和吸收律.

14.41　设 $A=\{1,2\}$,以 A 中全体元素作为群的元素,能够构成多少个不同构的群,以 A 中全体元素作为格的元素能构成多少个不同构的格?

14.42　设$\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$是布尔代数,证明对于 B 中任意元素 a,b 有以下命题成立.

(1) $a\vee(a'\wedge b)=a\vee b$

(2) $a\wedge b'=0\Leftrightarrow a'\vee b=1\Leftrightarrow a\leqslant b$

14.43　判断下述代数系统是否为格? 是不是布尔代数?

(1) $S=\{1,3,4,12\}$;任给 $x,y\in S$,$x\circ y=\text{lcm}(x,y)$,$x*y=\gcd(x,y)$,其中 lcm 是求最小公倍数,gcd 是求最大公约数.

(2) $S=\{0,1,2\}$,$\circ$是模3加法,$*$是模3乘法.

(3) $S=\{0,1,\cdots,n\}$,其中$n\geqslant 2$.任给$x,y\in S$,$x\circ y=\max(x,y)$,$x*y=\min(x,y)$.

14.3 习题解答与分析

14.1 (1) 3元集合上有$3^{3^2}=3^9=19\,683$个二元运算,$3^3=27$个一元运算.其中可交换的运算有$3^6=729$个,幂等的运算有$3^6=729$个,交换并且幂等的运算有$3^3=27$个,不可交换、也不幂等的运算有

$$19\,683-(729+729)+27=18\,252(\text{个})$$

(2) 设A为n元集,有n^n个不同的一元运算.A上的每个二元运算都对应了一个运算表.运算表中有$n\times n$个位置,每个位置可以有n种可能的取值,根据乘法法则,有n^{n^2}个不同的二元运算.对于可交换的运算,运算表中上、下三角内的元素是对称分布的,因此主对角线上有n个位置,上三角中有$\frac{n^2-n}{2}$个位置,总计$\frac{n^2+n}{2}$个位置,每个位置可能有n种取值,因此可交换的运算有$n^{\frac{n^2+n}{2}}$个.类似的分析可知幂等的运算有n^{n^2-n}个,交换并且幂等的运算有$n^{\frac{n^2-n}{2}}$个,既不交换也不幂等的运算有$n^{n^2}-\left(n^{\frac{n^2+n}{2}}+n^{n^2-n}\right)+n^{\frac{n^2-n}{2}}$个.

14.2 (1) 构成代数系统.满足交换律、结合律.单位元为$\varnothing$,无零元,$\forall x\in P(B)$,$X^{-1}=X$.

(2) 构成代数系统.满足交换律、结合律.0为零元.仅当$n=1$时存在单位元1,此时有$1^{-1}=1$,$(-1)^{-1}=-1$.

(3) 构成代数系统.满足交换律、结合律.零元为b,无单位元和可逆元.

14.3 (1) 封闭,满足交换律、结合律、消去律;单位元0,$0^{-1}=0$,$1^{-1}=1$.

(2) 封闭,满足交换律.

(3) 封闭,满足交换律、结合律、幂等律;单位元为$\{a,b\}$,零元为$\varnothing$,$\{a,b\}^{-1}=\{a,b\}$.

(4) 乘法封闭,加法不封闭;乘法满足结合律、消去律;单位元为n阶单位矩阵,每个元素的逆元是逆矩阵.

14.4 (1) 构成,满足交换律,没有结合律,无单位元、零元和可逆元.

(2) 构成,满足交换律,没有结合律,无单位元、零元和可逆元.

(3) 构成,满足交换律、结合律,无单位元和可逆元,零元是1.

(4) 构成,有结合律,仅当S为单元集时满足交换律,单位元为恒等函数,除了S为单元集外不存在零元.双射函数有逆元,即反函数.

14.5 (1) × (2) × (3) × (4) √ (5) √ (6) √

说明:(1) 中运算不封闭,例如2,3都是A中元素,但是$2+3=5$不是A中元素.

(2) 0不是单位元,因为当x为负数时,$x*0\neq x$.

(3) 当$x\neq -1$时,x才存在逆元.

(4) 求最大公约数运算满足结合律.

(5) 该代数系统自身是平凡的子代数.

(6) 同态映射保持交换性.

14.6 (1) 2 元集合上只有 2 种划分,因此只有 2 个等价关系,即 $B=\{I_A,E_A\}$.

(2) V 的运算表如表 14.5 所示.

(3) V 的单位元是 E_A,零元是 I_A,可逆元素只有 E_A,$E_A^{-1}=E_A$.

(4) V 为半群、独异点,不是群.

14.7 (1) 因为 $(b\circ b)\circ c=a\circ c=c$,$b\circ(b\circ c)=b\circ d=d$,不满足结合律.

(2) 单位元 a,零元 d.

14.8 根据已知条件构造运算表如表 14.6 所示,其中 & 可以从 a,b,c 中任意选定一个,所以有 3 种答案.

表 14.5

$\cap$	I_A	E_A
I_A	I_A	I_A
E_A	I_A	E_A

表 14.6

*	a	b	c
a	a	c	&
b	c	b	b
c	&	b	c

运算不可结合,因为 $(a*b)*b=c*b=b$,$a*(b*b)=a*b=c$.

14.9 设 f 为同态,于是由 $f(b)f(b)=f(bb)=f(b)$,知道 $f(b)$是幂等元. 而该运算表中只有 b 是幂等元,于是得到 $f(b)=b$. 假设 $f(c)=a$,那么就有

$$b=f(b)=f(cb)=f(c)f(b)=ab=a$$

矛盾,于是 $f(c)\neq a$. 假设 $f(a)=c$,那么就有

$$c=f(a)=f(ab)=f(a)f(b)=cb=b$$

也产生矛盾. 综合上述结果知道同态映射 f 满足 $f(b)=b$,$f(c)\neq a$,$f(a)\neq c$. 因此,可能的赋值是:

$$f(a)=a,b;\quad f(b)=b;\quad f(c)=b,c$$

从而得到 4 个函数:

$$f_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,b\rangle\},\quad f_2=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

$$f_3=\{\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,b\rangle\},\quad f_4=\{\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

但是,由于

$$f_1(ac)=f_1(b)=b,\quad f_1(a)f_1(c)=ab=a$$

于是,只有 f_3和 f_4满足要求.

14.10 (1) 采用置换的表示,双射函数为:$f_1=(a)$,$f_2=(bc)$,$f_3=(ac)$,$f_4=(ab)$,$f_5=(abc)$,$f_6=(acb)$.

(2) 只有 f_1 和 f_4 为自同构,它们能满足同态映射条件,将零元 c 映到零元 c,即 $f(c)=c$.

14.11 设 G 为群,任取 $a,b,c\in G$,则

$$ab=ac\Rightarrow a^{-1}(ab)=a^{-1}(ac)\Rightarrow(a^{-1}a)b=(a^{-1}a)c\Rightarrow eb=ec\Rightarrow b=c$$

同理可证 $ba=ca\Rightarrow b=c$.

14.12 由已知得 $x^2y=yx$,于是

$$(yxy^{-1})(yxy^{-1})=x^4\Rightarrow yx^2y^{-1}=x^4$$

由于 y 是 2 阶元,因此 $y=y^{-1}$,再利用 $x^2y=yx$ 代入上式得

$$x^4=yx^2y^{-1}=yx^2y=yyx=x$$

由消去律得 $x^3=e$,即$|x|=1$ 或者 3. 由于 $x\neq e$,因此$|x|=3$.

14.13 设 2 阶元为 a,任取 G 中元素 x,根据主教材例 14.17 可知,xax^{-1}也是 2 阶元. 由于只有一个 2 阶元,于是 $a=xax^{-1}$,从而得到 $ax=xa$.

14.14 假如 $\forall x\in G$,都有 $x^2=e$,那么 $\forall x,y\in G$

$$xy=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx$$

与 G 是非交换群矛盾. 因此 G 中存在非单位元 a,$a^2\neq e$,即 $a\neq a^{-1}$,令 $b=a^{-1}$即可.

14.15 由于 xH 是 G 的子群,故 $e\in xH$;即存在 $h\in H$ 使得 $xh=e$. 从而 $x=h^{-1}$. 由于 H 是群,因此 $x\in H$.

14.16 令

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}i&0\\0&-i\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0&i\\i&0\end{bmatrix}$$

于是得到运算表如表 14.7 所示

表 14.7

	A	$-A$	B	$-B$	C	$-C$	D	$-D$
A	A	$-A$	B	$-B$	C	$-C$	D	$-D$
$-A$	$-A$	A	$-B$	B	$-C$	C	$-D$	D
B	B	$-B$	$-A$	A	D	$-D$	$-C$	C
$-B$	$-B$	B	A	$-A$	$-D$	D	C	$-C$
C	C	$-C$	$-D$	D	$-A$	A	B	$-B$
$-C$	$-C$	C	D	$-D$	A	$-A$	$-B$	B
D	D	$-D$	C	$-C$	$-B$	B	$-A$	A
$-D$	$-D$	D	$-C$	C	B	$-B$	A	$-A$

G 的子群有

$$G,\quad \langle A\rangle=\{A\},\quad \langle -A\rangle=\{A,-A\}$$

$$\langle B\rangle=\{A,-A,B,-B\},\quad \langle C\rangle=\{A,-A,C,-C\},\quad \langle D\rangle=\{A,-A,D,-D\}$$

子群格如图 14.2 所示.

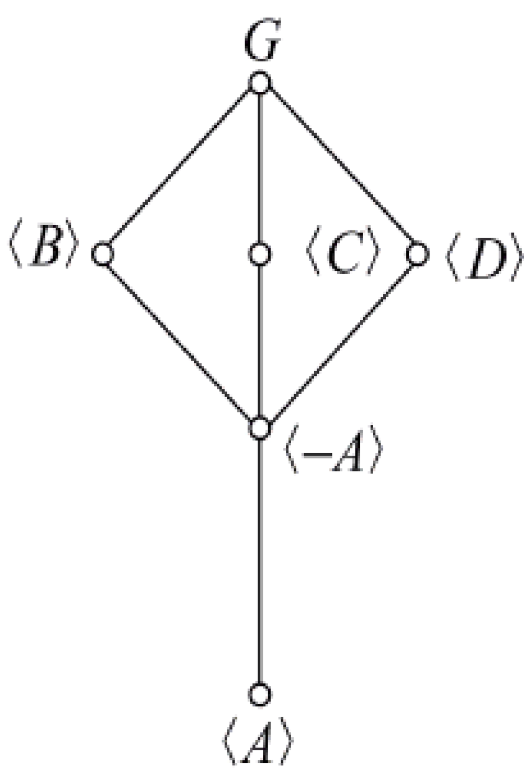


图 14.2

14.17 显然 H 非空.

$$\forall\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}d&e\\e&f\end{pmatrix}\in H$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}d&e\\e&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-d&b-e\\b-e&c-f\end{pmatrix}\in H$$

根据子群判定定理 H 是子群.

14.18 首先证明 f 为双射. 假设 $f(x)=f(y)$,那么 $axa^{-1}=aya^{-1}$,由消去律得到 $x=y$,因此 f 是单射的. 任取 $y\in G$,$f(a^{-1}ya)=aa^{-1}yaa^{-1}=y$,于是 f 是满射的. 下面证明 f 为同态. 任取 $x,y\in G$,则

$$f(xy)=axya^{-1}=(axa^{-1})(aya^{-1})=f(x)f(y)$$

14.19 (1) 证明:设$|a|=r$,则

$$(f(a))^r=f(a^r)=f(e)=e'$$

其中 e' 为 G' 的单位元. 这就证明了 $f(a)$ 的阶有限,且 $|f(a)|$ 整除 $|a|$.

(2) 若 $f(a)$ 的阶有限,a 的阶不一定有限. 考虑整数加群 $G=\langle \mathbf{Z},+\rangle$,模 3 加群 $G'=\langle Z_3,\oplus\rangle$. 令 $f:\mathbf{Z}\to Z_3$,且 $f(a)=(a)\bmod 3$,那么 f 是同态映射,在整数加群中 1 的阶不存在,但是在模 3 加群中,$|f(1)|=3$.

14.20 因为 H 非空,因此 $f(H)$ 非空. 任取 $x,y\in f(H)$,存在 $a,b\in H$ 使得 $f(a)=x$,$f(b)=y$. 由于 H 是子群,$ab^{-1}\in H$,于是

$$xy^{-1}=f(a)f(b)^{-1}=f(ab^{-1})\in f(H)$$

根据子群判定定理,$f(H)$ 是 G_2 的子群.

14.21 G 为非 Abel 群,必存在 $a,b\in G$,满足 $ab\neq ba$. 令 $f:G\to G$,$f(x)=a^{-1}xa$,则 $\forall x,y\in G$ 有

$$f(xy)=a^{-1}(xy)a=(a^{-1}xa)(a^{-1}ya)=f(x)f(y)$$

这就证明了 f 为同态映射. 由

$$f(x)=f(y)\Rightarrow a^{-1}xa=a^{-1}ya\Rightarrow x=y$$

证明了 f 为单射. 且对任意 $c\in G$,有 $f(aca^{-1})=c$,于是 f 为满射. 从而证明了 f 为同构.

如果 AutG 只含有 1 个元素,即恒等映射. 那么对于所有的 $x\in G$,$f(x)=a^{-1}xa=x$,即 $xa=ax$,从而得到 $ab=ba$,与 $ab\neq ba$ 矛盾.

14.22 生成元为 1,3,5,7,9,11,13,15. 子群有 $\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle,\langle 4\rangle,\langle 8\rangle$.

14.23 设 $x=a^t$ 是解,$0\leqslant t<n$,则

$$x^m=e\Leftrightarrow a^{tm}=e\Leftrightarrow n\mid tm$$

由于 m 整除 n,即存在正整数 k,使得 $n=km$. 于是 k 整除 t.

$$k\mid t\Rightarrow t=sk \qquad \text{其中 } s \text{ 为整数}$$

t 是 k 的倍数,又由于 $t<n$,因此 $t=0,1,\cdots,(m-1)k$. 从而得到 $x=a^0,a^k,a^{2k},\cdots,a^{(m-1)k}$. 容易验证以上 a 的幂都是方程的解,且两两不等.

14.24 所有的置换是:(1),(12),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1423),(1324);根据乘法的封闭性可知这些置换构成 S_4 的子群.

14.25 考虑 n 元对称群 S_n,设在表示式中具有 r 个不交轮换的置换有 $\left\langle {n \atop r} \right\rangle$ 个,得到这种置换的方法有两种:在 S_{n-1} 的每个含 $r-1$ 个轮换的置换中加入 1 阶轮换 (n),方法有 $\left\langle {n-1 \atop r-1} \right\rangle$ 种;从 S_{n-1} 的每个含有 r 个轮换的置换中加入 n,加入的方法有 $n-1$ 种,于是得到如下递推方程

$$\left\langle {n \atop r} \right\rangle=(n-1)\left\langle {n-1 \atop r} \right\rangle+\left\langle {n-1 \atop r-1} \right\rangle$$

$$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle=0,\quad \left\langle {n \atop 1} \right\rangle=(n-1)!$$

不难看出,这个递推方程的形式和初值都与第一类 Stirling 数的方程完全一样. 因此有 $\left\langle {n \atop r} \right\rangle=\left[{n \atop r} \right]$.

14.26 先考虑封闭性. $\forall x,y\in G$,则

$$(f+g)(x+y)=f(x+y)+g(x+y)=f(x)+g(x)+f(y)+g(y)$$
$$=(f+g)(x)+(f+g)(y)$$
$$f\circ g(x+y)=g(f(x+y))=g(f(x)+f(y))$$
$$=g(f(x))+g(f(y))=f\circ g(x)+f\circ g(y)$$

$f+g$ 与 $f\circ g$ 都是同态,因此 EndG 关于+和∘运算封闭. 显然+在 EndG 中满足交换律. 下面验证结合律. $\forall f,g,h\in$ EndG, $\forall x\in G$,

$$((f+g)+h)(x)=(f+g)(x)+h(x)=(f(x)+g(x))+h(x)$$
$$=f(x)+(g(x)+h(x))=(f+(g+h))(x)$$
$$(f+f_0)(x)=f(x)+f_0(x)=f(x)+0=f(x)$$

其中 $f_0:G\to G, f_0(x)=0$ 为零同态,这里的 0 是群 G 的单位元. 于是 $f+f_0=f$,同理可证 $f_0+f=f$. 令 $g:G\to G, g(x)=-f(x)$,那么

$$(f+g)(x)=f(x)-f(x)=0,\quad (g+f)(x)=-f(x)+f(x)=0$$

因此 g 是 f 的负元. 综上所述,EndG 关于+运算构成 Abel 群. 由于函数复合运算满足结合律,EndG 关于∘运算构成半群. $\forall f,g,h\in$ EndG, $\forall x\in G$,则

$$f\circ(g+h)(x)=(g+h)(f(x))=g(f(x))+h(f(x))$$
$$=f\circ g(x)+f\circ h(x)=(f\circ g+f\circ h)(x)$$

因此 $f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$. 同理可证右分配律也成立. 于是〈EndG,+,∘〉构成环.

14.27 $0\in R_1$, R_1非空. $\forall x,y\in R_1$,则

$$(x-y)a=xa-ya=0-0=0$$

因此 $x-y\in R_1$. $\forall x,y\in R_1$,有

$$(xy)a=x(ya)=x0=0$$

因此 $xy\in R_1$. 于是,R_1是 R 的子环.

14.28 任何有理数可以表示为 p/q,其中 p,q 为整数,$q>0$,p 与 q 互素. 如果 f 为自同构,那么满足 $f:Q\to Q$,且 $f(0)=0, f(1)=1$,因此

$\forall x\in \mathbf{Z}^+, f(x)=f(1+1+1+\cdots+1)=f(1)+f(1)+\cdots+f(1)=x$

$\forall x\in \mathbf{Z}^-$,令 $x=-y$,则 $f(x)=f(-y)=-f(y)=-y=x$

$\forall x\in \mathbf{Q}^+, x=p/q,\quad f(x)=f(p/q)=f(pq^{-1})=f(p)f(q^{-1})$

$\qquad =p(f(q))^{-1}=pq^{-1}=p/q=x$

$\forall x\in \mathbf{Q}^-, x=-p/q, f(x)=f(-p)f(q^{-1})=-f(p)f(q^{-1})=-p/q=x$

从而证明了 f 为恒等映射.

14.29 (1) 由于 $a^2=a$,于是有

$$a+a+a+a=a^2+a^2+a^2+a^2=(a+a)^2=a+a$$

根据环中加法的消去律,得 $a+a=0$.

(2) 任取 $a,b\in R$,则

$$(a+b)^2=a+b\Rightarrow a^2+ab+ba+b^2=a+b$$
$$\Rightarrow a+ab+ba+b=a+b\Rightarrow ab+ba=0$$
$$\Rightarrow ab+ba=ab+ab$$

根据环中加法的消去律,有 $ab=ba$.

14.30 $(ab)(b^{-1}a^{-1})=a(bb^{-1})a^{-1}=aa^{-1}=1$

$(b^{-1}a^{-1})(ab)=b^{-1}(a^{-1}a)b=b^{-1}b=1$

于是 $b^{-1}a^{-1}$ 是 ab 的逆元，即 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$.

14.31 (1) × (2) √ (3) × (4) ×

说明：(1)乘法不封闭；(2)因为整环有消去律，但是积代数不一定保持消去律，因此不一定是整环；(3)2^n元的格中只有一个是布尔格；(4)在有补格中每个元素都有补元，但是有的元素具有多个补元，不是唯一的，因此求补不构成一元运算.

14.32 (1) G 的子群有：⟨1⟩,⟨2⟩,⟨3⟩,⟨6⟩,⟨9⟩,⟨0⟩.

(2) 子群格的哈斯图如图 14.3 所示.

(3) 这个格是分配格、不是有补格和布尔代数.

14.33 哈斯图如图 14.4 所示. 这个格是分配格、有界格、有补格、布尔格.

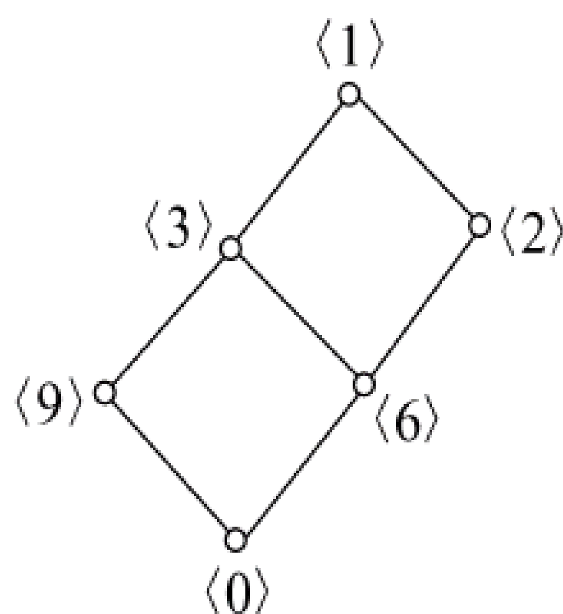


图 14.3

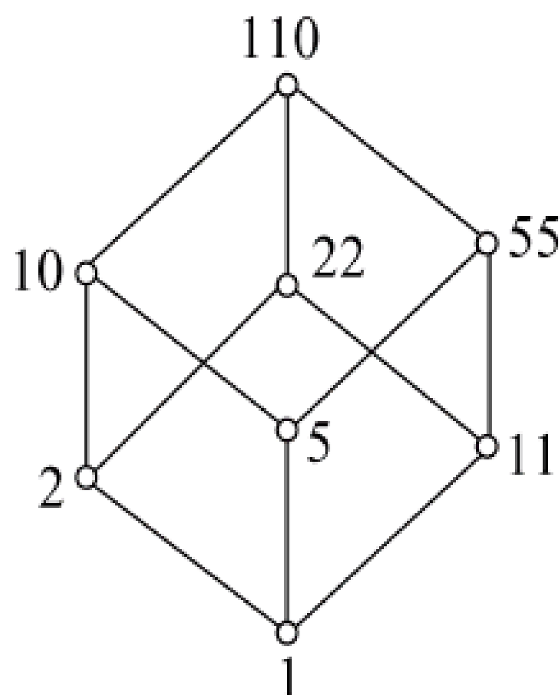


图 14.4

14.34 (1) G 的自同构有 4 个，是 $f_i: Z_5 \to Z_5, f_i(x)=(xi) \bmod 5$ ，$i=1,2,3,4$，自同构群 Aut$G=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$，其运算表如表 14.8 所示.

(2) Aut$G$ 的子群：$H_1=\{f_1\}$，$H_2=\{f_4,f_1\}$，Aut$G$，子群格 L 的哈斯图如图 14.5 所示.

表 14.8

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_4	f_1	f_3
f_3	f_3	f_1	f_4	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

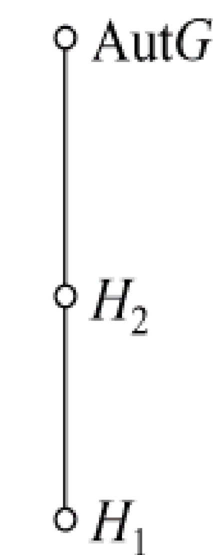


图 14.5

(3) L 是分配格，不是有补格与布尔格.

14.35 (1) 哈斯图如图 14.6 所示，是一条链.

(2) 是格，也是分配格，不是有补格和布尔格.

14.36 (1) $A_0=\{x \mid x\in \mathbf{R} \land 0\leqslant x\leqslant 1\}=[0,1]$

$A_1=\{x \mid x\in \mathbf{R} \land -1\leqslant x\leqslant 2\}=[-1,2]$

$A_2=\{x \mid x\in \mathbf{R} \land 0\leqslant x\leqslant 3\}=[0,3]$

$A_3=\{x \mid x\in \mathbf{R} \land -1\leqslant x\leqslant 4\}=[-1,4]$

$A_4=\{x \mid x\in \mathbf{R} \land -2\leqslant x\leqslant 5\}=[-2,5]$

哈斯图如图 14.7 所示. 极大元、最大元是 A_4，极小元、最小元是 A_0.

(2) 构成有界格、分配格.

14.37 (1) 不是,9 与 12 在 L 中的最小公倍数是 36,但是 36 不属于 A.

(2) 不是,2 与 3 在 L 中的最小公倍数是 6,但是 6 不属于 B.

(3) 是,因为两个运算都封闭.

14.38 所有的 5 元格如图 14.8 所示.

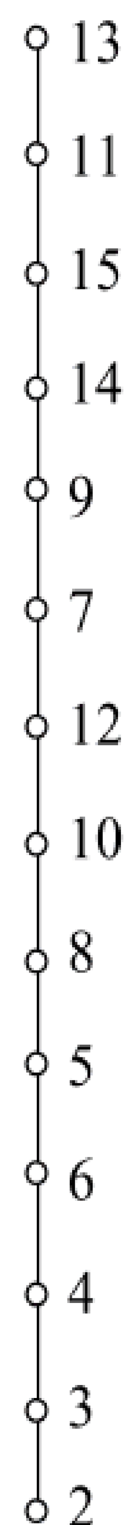


图 14.6

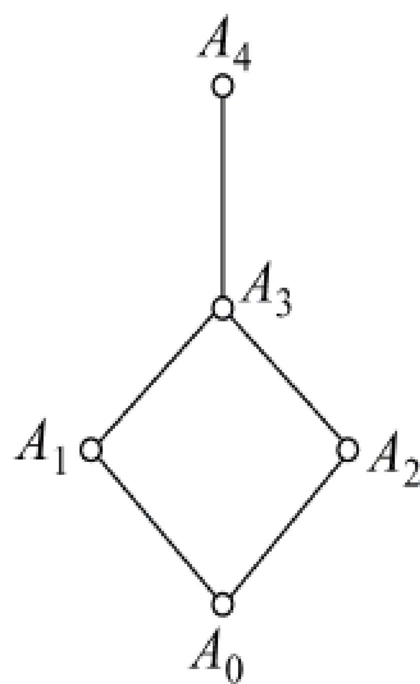


图 14.7

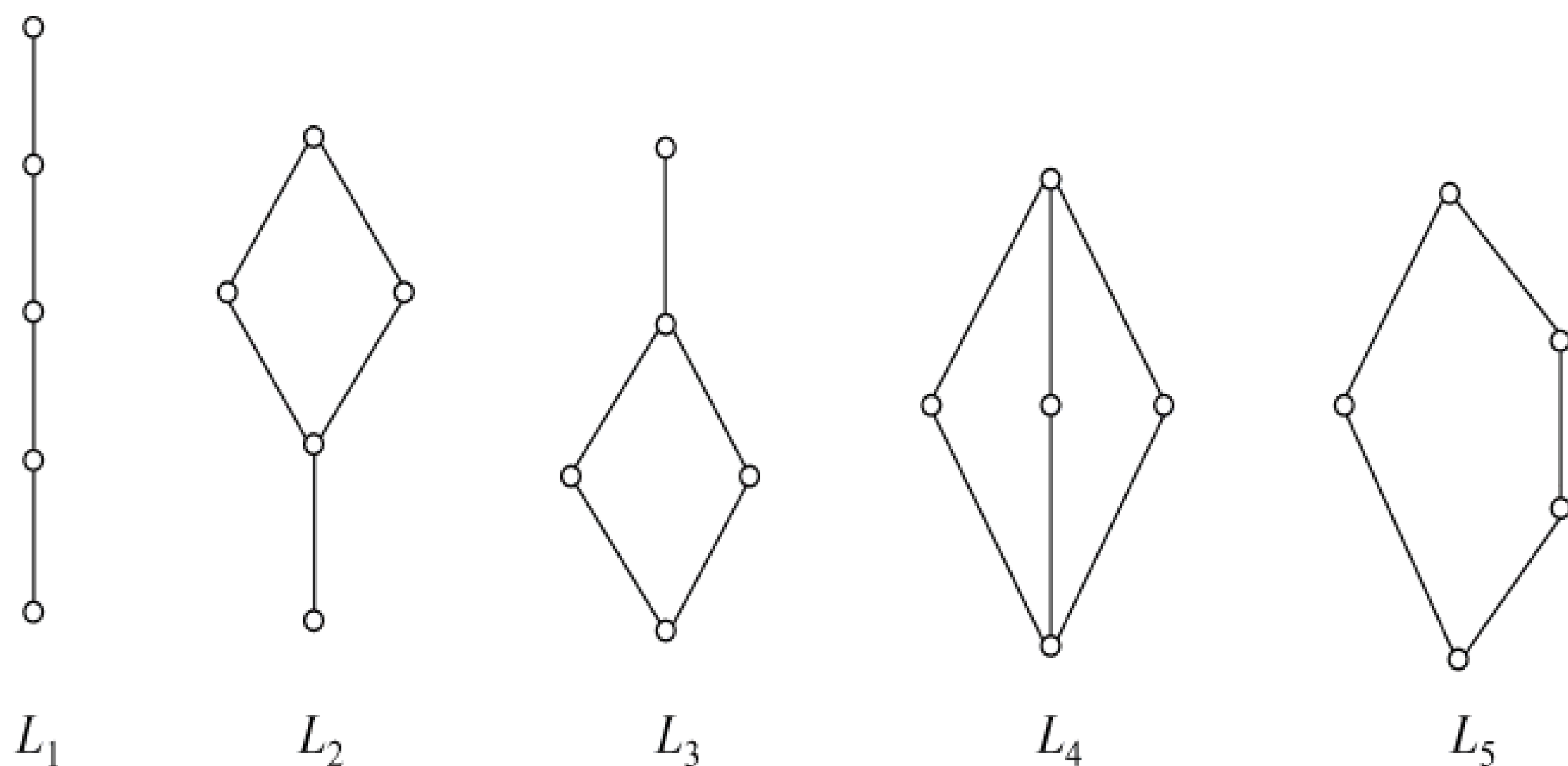


图 14.8

图 14.8 中都是有界格,其中 L_1,L_2,L_3是分配格,L_4和 L_5是有补格.没有布尔格.

14.39 1 元子格:$\{a\}$,$\{b\}$,$\{c\}$,$\{d\}$,$\{e\}$;

2 元子格:$\{a,b\}$,$\{a,c\}$,$\{a,d\}$,$\{a,e\}$,$\{b,c\}$,$\{b,d\}$,$\{b,e\}$,$\{c,e\}$,$\{d,e\}$;

3 元子格:$\{a,b,c\}$,$\{a,b,d\}$,$\{a,b,e\}$,$\{a,c,e\}$,$\{a,d,e\}$,$\{b,c,e\}$,$\{b,d,e\}$;

4 元子格:$\{a,b,c,e\}$,$\{a,b,d,e\}$,$\{b,c,d,e\}$;

5 元子格:$\{a,b,c,d,e\}$.

14.40 (3) $\forall a\in L$,显然有 $a\leqslant a\vee a$,又由于 $a\leqslant a$,于是 $a\vee a\leqslant a$,根据偏序的反对称性得到 $a\vee a=a$.再使用对偶原理得到 $a\wedge a=a$.

(4) $\forall a,b\in L$,显然有 $a\leqslant a\vee(a\wedge b)$.另外一方面,由 $a\leqslant a$ 和 $a\wedge b\leqslant a$ 得到$a\vee(a\wedge b)\leqslant a$.利用偏序的反对称性,得到$a\vee(a\wedge b)=a$. 再使用对偶原理得到$a\wedge(a\vee b)=a$.

14.41 在同构的意义下,2 元群只有一个,就是 2 阶循环群.在同构的意义下,2 元的偏序集只有 2 个.一个是不含有边的,这是恒等关系,不是格.另外一个就是含有 1 条边的,这是 2 元的布尔格.

14.42 (1) $a\vee(a'\wedge b)=(a\vee a')\wedge(a\vee b)=1\wedge(a\vee b)=a\vee b$

(2) 由 $a\wedge b'=0$ 得$(a\wedge b')'=1$,即 $a'\vee b=1$.由 $a'\vee b=1$ 得

$$a=a\wedge 1=a\wedge(a'\vee b)=(a\wedge a')\vee(a\wedge b)=0\vee(a\wedge b)=a\wedge b$$

而由 $a=a\wedge b$,$a\wedge b\leqslant b$,得到 $a\leqslant b$.

若 $a \leqslant b$,那么由 $a \leqslant a, a \leqslant b$ 得 $a \leqslant a \wedge b$,显然 $a \wedge b \leqslant a$,从而得到 $a = a \wedge b$,于是有

$$a \wedge b' = (a \wedge b) \wedge b' = a \wedge (b \wedge b') = a \wedge 0 = 0$$

综合上述,证明了这三个命题都是等价的.

14.43 (1) 是格,也是布尔代数.

(2) 不是格.实际上这个代数系统是环.

(3) 是格,是一条长度大于 2 的链.因此除了 0 与 n 互补以外,其他元素没有补元,因此不是布尔代数.

参 考 文 献

［1］ 屈婉玲，耿素云，张立昂．离散数字(第2版)．北京：清华大学出版社，2008.

［2］ 耿素云，屈婉玲，王捍贫．离散数学教程．北京：北京大学出版社，2002.

［3］ 耿素云，屈婉玲．离散数字．修订版．北京：高等教育出版社，2004.

［4］ Kenneth H Rosen．离散数学及其应用．第4版．袁崇义，屈婉玲，王捍贫，刘田译．北京：机械工业出版社，2002.

［5］ 汪仁官．概率论引论．北京：北京大学出版社，1994.

［6］ 潘承洞，潘承彪．初等数论．北京：北京大学出版社，1992.

［7］ Thomas H Cormen，Charles E Leiserson，Ronald L Rivest，Clifford Stein. Introduction to Algorithms. 2nd ed. The MIT Press，2001. 北京：高等教育出版社，2002(影印版).



普通高等教育“十一五”国家级规划教材
21世纪大学本科计算机专业系列教材

近期出版书目

- 计算概论(第2版)
- 计算概论——程序设计阅读题解
- 计算机导论(第3版)
- 计算机导论教学指导与习题解答
- 计算机伦理学
- 程序设计导引及在线实践
- 程序设计基础(第2版)
- 程序设计基础习题解析与实验指导
- 程序设计基础(C语言)
- 程序设计基础(C语言)实验指导
- 离散数学(第3版)
- 离散数学习题解答与学习指导(第3版)
- 数据结构(STL框架)
- 算法设计与分析
- 算法设计与分析(第2版)
- 算法设计与分析习题解答(第2版)
- C++程序设计(第2版)
- Java程序设计
- 面向对象程序设计(第3版)
- 形式语言与自动机理论(第3版)
- 形式语言与自动机理论教学参考书(第3版)
- 数字电子技术基础
- 数字逻辑
- FPGA数字逻辑设计
- 计算机组成原理(第3版)
- 计算机组成原理教师用书(第3版)
- 计算机组成原理学习指导与习题解析(第3版)
- 微机原理与接口技术
- 微型计算机系统与接口(第2版)
- 计算机组成与系统结构
- 计算机组成与体系结构习题解答与教学指导
- 计算机组成与体系结构(第2版)
- 计算机系统结构教程
- 计算机系统结构学习指导与题解
- 计算机系统结构实践教程
- 计算机操作系统(第2版)
- 计算机操作系统学习指导与习题解答
- 编译原理
- 软件工程(第2版)
- 计算机图形学
- 计算机网络(第3版)
- 计算机网络教师用书(第3版)
- 计算机网络实验指导书(第3版)
- 计算机网络习题解析与同步练习
- 计算机网络软件编程指导书
- 人工智能
- 多媒体技术原理及应用(第2版)
- 计算机网络工程(第2版)
- 计算机网络工程实验教程
- 信息安全原理及应用